

About the Works of Aḥmad ibn ‘Umar al-Karābīsī, A Mathematician of the 4th AH/ 10th AD

Narges Assarzadegan

Isfahan Mathematics House (IMH), Isfahan, Iran

E-mail: narges.assarzadegan@gmail.com (<https://orcid.org/0000-0002-7614-6060>)

Article Info

Article type:

Research Article

Article history:

Received 12 February 2025

Revised 16 April 2025

Accepted 25 April 2025

Published online 20 July 2025

Keywords:

Aḥmad ibn ‘Umar al-Karābīsī, Annulus, Critiques of the Postulates in Euclid’s *Elements*, Euclid’s Fifth Postulate (Parallel Postulate), *Kitāb al-Taqāsīm li-Uqlīdis* (Euclid’s Book of Divisions), Mathematics of the Islamic Golden Age, Torus, Toroid.

ABSTRACT

Aḥmad ibn ‘Umar al-Karābīsī (4th AH/10th AD), an eminent mathematician, authored two extant treatises:

1. *Sharḥ Mushkil Šudūr Maqālāt Kitāb Uqlīdis* (Explanation of Problematic Propositions in Euclid’s Elements) – A commentary on the postulates of Euclid’s Elements (Books I.1–11, excluding I.8–9), synthesizing philosophical insights with analyses of Greek and Islamic scholars to enhance pedagogical clarity.
2. *Masāḥat al-Ḥalaq* (Measurement of Rings) – A geometric treatise establishing definitions and proofs for theorems on annular shapes and circular segments.

The *Sharḥ Mushkil Šudūr*, preserved in only two manuscripts, holds exceptional historical significance as evidence of al-Karābīsī’s access to Arabic translations of Euclid’s *Elements* and Greek commentaries. His work demonstrates methodological parallels with al-Nayrīzī’s commentary and Gerard of Cremona’s Latin translations, while uniquely engaging with Euclid’s fifth postulate. Attributed but lost works include *Tafsīr Uqlīdis* (Commentary on Euclid), *Ḥisāb al-Dawr* (Calculation of Cycles), *Kitāb al-Waṣāyā* (Book of Directives), and *Kitāb al-Hindī* (Indian Treatise). This study offers a critical analysis of *Sharḥ Mushkil Šudūr*, presents a critical edition and translation of *Masāḥat al-Ḥalaq*, and provides annotations on key theorems, underscoring al-Karābīsī’s contributions to the mathematical heritage of the Islamic Golden Age.

Cite this article: Assarzadegan, N. (2024). About the Works of Aḥmad ibn ‘Umar al-Karābīsī, A Mathematician of the 4th AH/ 10th AD, 22 (2), 133-181. DOI: <http://doi.org/10.22059/JIHS.2025.390440.371817>

© The Author(s). Publisher: University of Tehran Press



در باره آثار احمد بن عمر کرابیسی، ریاضی دان سده چهارم هجری قمری

نرگس عصارزادگان

خانه ریاضیات اصفهان، اصفهان، ایران

رایانامه: narges.assarzadegan@gmail.com (https://orcid.org/0000-0002-7614-6060)

اطلاعات مقاله	چکیده
نوع مقاله: مقاله پژوهشی	از احمد بن عمر کرابیسی ریاضی دان ممتاز سده چهارم هجری دو رساله بر جای مانده است: شرح مشکل صدور مقالات کتاب اقلیدس و مساحت الحلق. رساله اول شرحی بر مصادرات اصول اقلیدس (مقالات ۱ تا ۱۱ به جز مقالات ۸ و ۹) با هدف تسهیل یادگیری متعلم و با دیدگاهی کمابیش فیلسوفانه و مبتنی بر نظرات دانشمندان یونانی و اسلامی و رساله دوم شامل تعاریف و قضایایی در باره شکل های هندسی مطوق و حلقه هاست. رساله شرح مشکل صدور مقالات کتاب اقلیدس که تنها دو نسخه از آن باقی است از دیدگاه تاریخی اهمیت بسیاری دارد، چون سندی است که نشان می دهد کرابیسی به نسخه عربی اصول و برخی شرح های یونانی آن دسترسی داشته است و اثر او شباهت ها و تفاوت هایی با شرح اصول نیریزی و ترجمه لاتینی شرح اصول توسط ژرار کرمونایی دارد. از طرفی، او در این اثر خود به اصل موضوع یا مصادره پنجم مقاله اول اصول پرداخته است. رساله های دیگری نیز در منابع به کرابیسی منسوب است: تفسیر اقلیدس، حساب الدور، کتاب الوصایا، کتاب المهندی که هیچ کدام اکنون موجود نیستند. رساله های او از ارزشمندترین آثار دوره اسلامی به شمار می آیند. در این نوشته در باره رساله شرح مشکل صدور مقالات کتاب اقلیدس توضیحاتی عرضه می شود و رساله مساحت الحلق تصحیح و ترجمه می شود و توضیحات کوتاهی در باره برخی قضایا عرضه می شود.
تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۱۱/۲۴	
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۰۱/۲۷	
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۰۲/۰۵	
تاریخ انتشار: ۱۴۰۴/۰۴/۲۹	
کلیدواژه ها:	
اصول اقلیدس، حلقه، ریاضیات دوره اسلامی، شکوک مصادرات اصول اقلیدس، کتاب التقاسیم، کرابیسی، مصادره پنجم، مقاله اول اصول، مطوق.	

استناد: عصارزادگان، نرگس (۱۴۰۳). در باره آثار احمد بن عمر کرابیسی، ریاضی دان سده چهارم هجری قمری. تاریخ علم، ۲۲ (۲)، ۱۳۳-۱۸۱

DOI: <http://doi.org/10.22059/JIHS.2025.390440.371817>

ناشر: مؤسسه انتشارات دانشگاه تهران. © نویسندگان.

مقدمه

از تولد و زندگی احمد بن عبدالله بن محمد بن سرمد ابن عمر^۱ معروف به کرابیسی^۲ نیشابوری حاسب (? - د. ۳۶۱ ق یا ۳۷۶ ق) ریاضی دان مسلمان سده چهارم هجری/دهم میلادی آگاهی چندانی نداریم (اسماعیل پاشا، ۱/۶۵؛ حاجی خلیفه، ۱۸/۶). برخی مورخین او را متعلق به نیمه دوم سده سوم دانسته اند (قربانی، ۳۸۹؛ عمر کحاله، ۲/۲۱۸)، اما چون ابن ندیم (۳۲۰ - ۳۸۰ ق) او را در فهرست منجمان و مهندسان تازه کار آورده (۴۷۹) و تاریخ اتمام الفهرست ۳۷۷ ق بوده است، پس کرابیسی باید از دانشمندان نیمه دوم سده چهارم هجری باشد. کرابیسی به عنوان برجسته ترین مهندسان و از دانشمندان علم اعداد و شارحان اصول اقلیدس بوده است (ابن ندیم، ۴۷۹، ۵۰۴؛ حاجی خلیفه، ۳/۵۵۲). حاجی خلیفه او را کرابیسی الهندسی نامیده (۱۸/۶) و احسان اوغلو و روزنفلد^۴ (۸۹) او را کرابیسی هندی و احتمالاً دارای اصل و نسب هندی دانسته اند.^۵

از کرابیسی دو رساله عربی باقی است: شرح مشکل صدور مقالات کتاب اقلیدس و مساحت الحلق. مساحت الحلق در ۱۹۳۱ میلادی تصحیح و به آلمانی ترجمه و شرح شده و در ۱۹۳۳ بر آن شرح، تکمله ای نوشته شده است (نک: منابع مقاله). چند نسخه خطی از مساحت الحلق بر جای مانده است (برای آگاهی از سایر نسخه ها نک: سزگین،^۶ ۲۷۷؛ احسان اوغلو و روزنفلد، ۸۹؛ بروکلمان،^۷ ۵۹۶/۴)، اما از رساله شرح مشکل صدور مقالات کتاب اقلیدس تنها دو نسخه (کتابخانه بانکی پور،^۸ شماره ۲۴۳۰؛ کتابخانه ملی رشت،^۹ شماره C۸۱) باقی

۱. در نسخه مساحت الحلق ۲۴۳۴/۱۴ دانشگاه تهران (۱۴۰)، احمد بن عیسی الکرابیسی نامیده شده است.

۲. کرابیس جمع کرباس است و کرابیسی یعنی کرباس ساز و کرباس فروش.

۳. حاجی خلیفه اینجا نوشته است نسخه به خط مؤلف را دیده است.

4. Rosenfeld & Ihsanoğlu

۵. این به نظر درست نمی آید. منشأ این خطا می تواند خواندن کلمه «هندی» به جای «هندسی» باشد.

6. Sezgin

7. Brockelmann

۸. نسخه کتابخانه خدابخش (بانکی پور) ۵۸ برگ دارد و به خط زیبای نستعلیق نوشته شده است. تاریخ نسخه معلوم نیست اما احتمالاً باید از سده نهم هجری باشد (فهرست کتابخانه خدابخش، ۲۲/۲۷-۲۲).

۹. در قیاس با نسخه بانکی پور، مقدمه نسخه رشت ناقص است و صفحات اول آن موجود نیست (نسخه رشت، ۴-۱۲۳). نسخه کتابخانه رشت ۱۲۳ صفحه دارد.

است. نسخه‌ای از رساله شرح مشکل صدور مقالات کتاب اقلیدس از ابن هیثم (۳۵۴-۴۳۰ق) به رساله کرابیسی در کتابخانه ملی رشت الحاق شده است^۱ (۱۲۶-۳۸۹). در منابع رساله‌های ناموجود تفسیر اقلیدس، حساب الدور، کتاب الوصایا، کتاب الهمندی از کرابیسی یاد شده است (ابن ندیم، ۳۴۰، قفطی، ۷۹). در ادامه نخست محتوای رساله شرح مشکل صدور مقالات کتاب اقلیدس بررسی و سپس رساله مساحت الخلق ترجمه و تصحیح می‌شود و در صورت لزوم توضیحات مختصری در پانویس عرضه می‌شود.

رساله شرح مشکل صدور مقالات کتاب اقلیدس

مقاله اول کتاب اصول اقلیدس شامل تعاریف، اصل‌های موضوع (اصول مسلم، مصادرات)^۲، اصل‌های بدیهی (بدیهیات)^۳ و قضایایی^۴ است.^۵ مثلاً «نقطه آن است که جزء ندارد» یک تعریف از مقاله اول اصول است، «کل بزرگ‌تر از جزء است» یک اصل بدیهی است و اصل موضوع یا مصادره پنجم مقاله اول که مورد مناقشه ریاضی‌دانان یونانی و دوره اسلامی بوده و رساله‌های متعددی در باره آن تألیف شده است^۶ چنین است:

اگر خط راستی بر دو خط راست فرود آید و مجموع دو زاویه درونی که در یک طرف خود تشکیل می‌دهد از دو قائمه کمتر باشد، آن دو خط راست اگر بی‌نهایت امتداد داده شوند، یکدیگر را در همان طرف که مجموع دو زاویه در آن کمتر از دو قائمه است، می‌برند.^۷

۱. این دو نسخه به یک دست خط کتابت شده‌اند. ابتدا و انتهای رساله ابن هیثم نیز هیچ نشانی از نویسنده و تاریخ دیده نمی‌شود. در انتهای رساله ابن هیثم نوشته شده است: «کاتب الحروف محمدعلی، سیوم ذی حجه، تمام شد.»

2. Postulates

3. Axioms

4. Theorems

۵. مقالات دوم تا یازدهم به جز مقالات هشتم و نهم شامل تعاریف و قضایاست. مقالات ۸ و ۹ و ۱۲ و ۱۳ فقط شامل قضایاست.

۶. مثلاً رساله شرح مصادرات کتاب اقلیدس و شرح معانیه، و حل شکوک المقالة الاولى از ابن هیثم، شرح ماأشکل من مصادرات اقلیدس عمر خیام، در حل مشکل مصادره خطوط موازی ابن سالار، الرسالة الشافیه عن الشک فی الخطوط المتوازیة و تحریر اصول اقلیدس خواجه نصیرالدین طوسی، المطالب العالیة و جامع العلوم فخر رازی، اصلاح کتاب اصول عباس ابن سعید جوهری و فی برهان المصادرة مشهورة من اقلیدس از ثابت بن قره. ۷. کنکاش برای حل این اصل به کشف اصل توازی در هندسه‌های نااقلیدسی منجر شد.

کرابیسی در باره تفاوت میان اصل‌های بدیهی که آنها را «اشیاء المتعارفة» و اصل‌های موضوع یا مصادرات که آنها را «اشیاء التي صادر علیها» نامیده است می‌گوید:

مصادرات نزد خاصه شناخته شده‌اند و اشیای متعارفه نزد خاصه و عامه شناخته شده‌اند و قابل انکار نیستند و دانستن آنها برای فهم کل اصول لازم است (نسخه رشت، ۲۸).

کرابیسی در رساله شرح مشکل صدور مقالات کتاب اقلیدس مقالاتی را شرح کرده که علاوه بر قضایا شامل تعاریف و اصول بدیهی و موضوعه^۱ است. همان طور که حکیم عمر خیام (۴۳۹-۵۲۶ ق) در شرح ماأشکل من مصادرات اقلیدس گفته است اثبات مقدمات و مبادی کتاب اصول بر عهده فلسفه اولی و علم کلی حکمت است (همایی، ۲۲۷)، کرابیسی در شرح مقاله اول اصول، مبادی فلسفی مربوط به تعاریف اولیه چون نقطه، بسیط و زاویه را از دیدگاه دانشمندان و فلاسفه یونانی از جمله سامیوس <کذا>^۲، ارشمیدس، افلاطون و خرمیدس <کذا>^۳ گفته (نسخه رشت، ۶، ۸ و ۱۰) و به مقایسه اعمال فیلسوفان و مهندسان^۴ پرداخته است (نک: دنباله مقاله). لذا این اثر کرابیسی مؤید ارتباط میان فلسفه و هندسه در سده چهارم هجری است.^۵

در سرتاسر رساله، متن اصول با «قال اقلیدس» و شرح کرابیسی با «قال احمد» متمایز شده است.^۶ بر اساس شواهد متنی در مواضعی شرح با «أقول»، «فأقول»، «أفرض» و موارد مشابهی (نسخه رشت، ۶، ۲۴، ۴۹، ۶۶، ۶۸، ۷۰ و ..) آغاز شده است، لذا محتمل است که این رساله را شخص دیگری جز

۱. یعنی مقالاتی به جز ۸، ۹، ۱۲ و ۱۳.

۲. شاید آریستارخوس ساموسی (Aristarchus of Samos) (۳۱۰-۲۳۰ ق.م) یا کانن ساموسی (Conon of Samos) (۲۸۰-۲۲۰ ق.م) باشد. برنتیس که تنها نسخه کتابخانه خدابخش را در اختیار داشته آن را «؟انیوس» خوانده است (ص ۳۲).

۳. خارمیدس (Χαρμίδης) نام یکی از مکالمات افلاطون و نام برادرزاده اوست. ممکن است خرمیدس (قفطی، ۱۸)، جرمیدس یا خرومیدس باشد (نک: برنتیس، ۳۳، ۳۴).

۴. یعنی کسانی که به کار هندسه مشغول بودند.

۵. برای اطلاعات بیشتر نک: معصومی همدانی، حسین، «متکلم و ریاضی‌دان: فخر رازی و آثار هندسی ابن هیثم»، تاریخ علم، دوره ۱۱، شماره ۱، بهار و تابستان ۱۳۹۲، ۱۳۹-۱۵۷.

۶. نسخه کتابخانه بانکی پور (خدابخش) با این جمله شروع شده است: «رب أعن قال احمد بن عمر کرابیسی» و به «تم کتاب احمد بن عمر الکرابیسی» خاتمه یافته است.

کرایبسی با هدف نقل از شرح او بر اصول نوشته و خود نیز توضیحاتی بر آن افزوده باشد، یا ممکن است این سبک محاوره غیرمستقیم ویژه رساله‌ای آموزشی در آن دوره باشد. شرح‌های دقیق نویسنده نشان از هوشمندی او دارد. مؤلف در مقدمه بعد از یاری جستن از خداوند متعال و صلوات بر پیامبرش می‌گوید هر علمی طبقاتی و هر صنعتی^۱ درجاتی دارد که بعضی از بقیه بالاتر است و هر صنعتی مراتبی دارد که بعضی بر بعضی تقدم دارند و برای آموزش مبتدی باید ترتیب این مراتب رعایت شود. او «مشکل صدور مقالات کتاب اقلیدس و اصول علم قضایا» را که برای متعلم مبتدی دشوار است شرح داده است تا بخواند و بفهمد و شکوکی را که در قضایای آن رخ می‌دهد توضیح داده است تا بهتر فهمیده شود (نسخه بانکی‌پور، شماره ۲۴۳۰، گ ۲ پ).

کرایبسی در این رساله از یعقوب ابن اسحاق کندی (سده دوم و سوم هجری) در تعریف زاویه مسطحه و در چند موضع از حجاج بن مطر حاسب^۲ (سده دوم و اوایل سده سوم هجری) و شرح نسخه مأمونی نام برده است.^۳ او در تعریف چهارضلعی «منحرف» که دو ضلع متقابل موازی دارد و تعریف چهارضلعی «شبه منحرف» به کتاب تقاسیم اقلیدس استناد کرده است^۴ (نسخه رشت، ۲۲). کتاب تقاسیم اقلیدس (تقسیم اشکال یا کتاب القسمة) را ثابت بن قره اصلاح کرده است (ابن ندیم، ۴۸۰) اما اکنون اثری از این اصلاح بر جای نمانده است. متن کتاب تقاسیم اقلیدس از بین رفته است و تنها ارجاعاتی به این اثر در شرح پروکلوس بر اصول اقلیدس باقی است. سجزی (ح ۳۳۰-ح ۴۱۵ ق) جملات ابتدایی همه قضایای کتاب تقاسیم را به علاوه برهان چهار قضیه به عربی ترجمه کرده و وپکه^۵ در ۱۸۵۱ م ترجمه فرانسوی آن را منتشر کرده است (هوخندایک، ۱۴۴^۶).

۱. کرایبسی هندسه را به عنوان «صناعت» معرفی کرده است.

۲. حجاج بن مطر از مترجمین علوم به عربی در اوایل خلافت عباسیان بود و دو ترجمه موسوم به هارونی و مأمونی از کتاب اصول اقلیدس به انجام رساند (قربانی، ۲۲۵).

۳. «وقد أوضحه الحجاج بن مطر الحاسب في شرحه للنسخة المأمونية» (نسخه رشت، ۷۲ و ۷۳).

۴. منحرف را امروز دوزنقه می‌نامیم؛ «قال احمد قد قال اقلیدس في كتاب التقاسيم انه اغا يسمى المنحرف من السطوح ذوات الاضلاع الأربعة ما كان منها ضلعان فقط من أضلاعه يتقابلان متوازيين والضلعان الآخران كيف وقعا. والسطوح الآخر ذوات الأربعة الأضلاع يسمى الشبهة بالمنحرفة».

5. Woepcke, F. (1851). *Le traité d'Euclide sur la division (des figures planes)*. Journal Asiatique, 16(5), 233-245.

6. Hogendijk

شرح کرابیسی در بررسی سیر انتقال کتاب اصول و شرح‌های آن به دنیای اسلام سند مهمی است. یاد کردن از برخی تعاریف به قول مؤلفان یونانی پیش‌گفته، دسترسی کرابیسی را به ترجمه‌های عربی اولیه از کتاب اصول و شرح‌های یونانی آن، که اکنون موجود نیستند، تأیید می‌کند. شباهت‌ها و تفاوت‌های شرح او با شرح ریاضی‌دان معاصر او، ابوالعباس نیریزی^۱ (نیمه دوم سده سوم و اوایل سده چهارم) نشان می‌دهد که این دو مؤلف از منابع اصیلی که برخی یکسان و برخی متفاوت‌اند بهره برده‌اند. از طرفی ترجمه لاتینی ژرار کرمونایی (۱۱۱۴-۱۱۸۷م) از شرح اصول با شرح کرابیسی و نیریزی پیوندهایی دارد. کرابیسی اغلب از دومین شرح حجاج بن مطر (مأمونی) استفاده کرده اما از سنت اسحاق - ثابت هم بهره برده است (برنتیس، ۳۱-۳۵).

برنتیس بر پایه مقایسه آثار کرابیسی، نیریزی، حجاج بن مطر، اسحاق - ثابت بن قره و محتوای ترجمه لاتینی ژرار و شروح یونانی از هرون و پروکلوس و واکاوی تعاریف و رویکردها نتیجه گرفته است که کرابیسی به شروح یونانی، از جمله شرح اصول هرون و سنبلیقیوس^۲، دسترسی مستقیم داشته است (ص ۶۱). علاوه بر این، چون تنها اثر برجامانده از کتاب التقاسیم ارجاعاتی است که در شرح پروکلوس بر اصول اقلیدس آمده است، استناد کرابیسی به کتاب التقاسیم می‌تواند گواهی بر این مدعا باشد که او به شرح پروکلوس دسترسی داشته است و این با نتیجه‌گیری برنتیس همسو است. در ادامه توضیحات کرابیسی در باره برخی تعاریف و اصول موضوعه مقاله اول را بررسی می‌کنیم.^۳

نقطه

اقلیدس تعریف می‌کند: «نقطه شیء است که جزوی ندارد».^۴ ابن هیثم در شرح مصادرات به تعاریف دیگری از متأخرین نیز اشاره می‌کند: «نقطه آن چیز است که

۷. بر کتاب تقاسیم بعداً پژوهش‌های بیشتری شده است. برای اطلاعات بیشتر به مقاله هوخندایک رجوع کنید.
۱. از شرح اصول اقلیدس نیریزی دو نسخه بر جای مانده است: کتابخانه لایدن، شماره ۳۹۹/۱ و کتابخانه آیت الله العظمی مرعشی، شماره ۶۵۲۶. نسخه لایدن نسبت به نسخه قم ناقص است.

2. Simplicius

۳. این توضیحات بر اساس نسخه رشت نوشته شده است. از نسخه بانکی پور تنها صفحه اول، آخر و برگ ۳۳ پ را در اختیار داشتیم.

۴. النقطة هی شیء لا جزء له.

جزء ندارد»^۱ و «نقطه نهایت خط است» و سپس به دیدگاه‌های فلسفی تشابه و تفاوت «نقطه» و «وحدت» از منظر وضع و قسمت‌ناپذیر بودن در مقابل «کثرت» پرداخته است (ابن هیثم، ۹۸-۹۹). در رساله کرابیسی علاوه بر تعاریف فوق به مفهوم زمان و حرکت نیز توجه شده است (نسخه رشت، ۵-۶):

احمد گوید: نقطه شیئی از اشیا است که «لا یتجزی» است. از گفته [اقلیدس] پیداست که عکس این گفته لازم نیست... و [در] زمان، اکنون و نهایت حرکت، هیچ یک جزوی ندارند. پس نقطه شیئی از اشیا است که جزوی ندارد و نهایت خط و غایتی برای حدوث و وجود آن است. و [نقطه] معقول است و نه محسوس و نه متوهم. من نیز می‌گویم نقطه غیر متوهم است. زیرا وهم برای اشیا محسوس ذکر می‌شود و [وهم] قوام صورت‌های محسوسات در نفس، بدون مشاهده آنها به حس است. و نقطه صورت ندارد، پس غیر متوهم و از معقولات است، چون شیء معقول قائم به نفس است، نه به جهت حس و نه صورت، ولکن از جهت عقل. و نقطه یکی از نهایت خط و ابتدای بودنش است.^۲

و او سپس دو تعریف از ریاضی دانان یونانی آورده است (همانجا):

و اما خرمیدس <کذا> می‌گوید: «نقطه مبدأ است و اولین مقداری است که کُش غیر قابل تجزیه است» و واضح است با این تعریف به عکس تعریف [اقلیدس] باز می‌گردد. و اما ساموس می‌گوید: «نقطه نهایتی است که بعد ندارد یا [نقطه] نهایت خط است».^۳

۱. النقطة هي ما لا جزء له.

۲. إن النقطة هي شيء من الأشياء التي لا يتجزى إذا كان الأمر ظاهراً من قوله إن العكس لا يجب فيما قوله. و ذلك أنه ليس كل ما لا جزء له، فهو نقطة إذا كانت النفس لا جزء بها. والآن من الزمان و نهاية الحركة لا جزء لأحدهما، فالنقطة هي شيء من الأشياء التي لا جزء لها وهي نهاية الخط و غاية حدوثه و كونه. وهي معقولة لا محسوسة ولا متوهمة. و ذلك أن الأشياء المحسوسة كلها ينقسم. والنقطة منقسمة فهي غير محسوسة. و أقول إنها غير متوهمة أيضاً و ذلك أن الوهم هو يذكر الأشياء المحسوسة وهو قوام صور المحسوسات في النفس من غير مشاهدة لها بالحس. والنقطة ليست ذات صورة فهي غير متوهمة بل هي معقولة. إذ كانت الأشياء المعقولة هي قائمة في النفس لا من جهة الحس ولا الصورة ولکن من جهة العقل، و هي أحد نهايات الخط والابتداء في كونه. و ذلك متى حركت حركة إلى غير الجهة التي يكون بها أحدثت حركتها. خطأ ما إما مستقيماً أو غير مستقيم على حسب حركتها.

۳. واما خرميدس <كذا>: إنه حدها بأن قال النقطة هي مبدأ و أول للمقادير كلها غير متجزية و بعله أن يكون حدها بهذا الحد ليصير عكس الحدها واضحاً. واما ساموس: فإنه قال النقطة هي نهاية ليست ذات بعداً و نهاية الخط.

خط و خط راست

اقلیدس در مقاله اول اصول می‌گوید خط طولی است که عرض ندارد.. در شرح کرابیسی در مورد تعریف خط نیز به بُعد حرکت نقطه اشاره شده است (نسخه رشت، ۶-۷):

احمد گوید: پیش‌تر [در مقدمه] گفتیم که خط از حرکت نقطه در غیر جهتی که در آن قرار دارد حادث می‌شود. و نقطه مقدار ندارد. پس خط باید عرض نداشته باشد. خط همان بُعد حرکت نقطه است از جهتی که بر آن قرار دارد به جهتی که به سوی آن حرکت می‌کند. پس خط یک بُعد دارد... به ایجاز می‌گوییم: خط اولین مقداری است که برایش حس بصر ذکر می‌شود... محسوس نیست، چون حائل بین سایه و آفتاب یا حائل بین دو رود جاری مختلف متصل. پس حائل بین سایه و آفتاب همان بُعدی است که عرضی ندارد چون این عرض می‌تواند از آفتاب یا از سایه باشد. و حائل بین آنها به یکی از دو تعلق ندارد و همان خطی است که طول دارد و عرض ندارد.^۱

ابن هیثم در شرح تعریف «خط راست خطی است که به‌گونه‌ای هموار بر نقطه‌های خودش قرار دارد» (اصول، مقاله اول، تعریف چهارم) می‌گوید نقاطی که روی خط راست فرض می‌شوند، همه بر یک سمت واحدند، یعنی بعضی بالا و پایین یا چپ و راست نیستند بلکه وضع همه یکی است (ابن هیثم، ۱۰۰). کرابیسی و نیزیزی به جنس و انواع خطوطی که به‌طور کلی از کلام اقلیدس می‌توان دریافت مثل خطوط راست، منحنی، مقوس، مرکب و قطوع مخروطی سهمی، هذلولی و بیضی^۲ که هندسه‌دان‌ها به‌کار می‌برند اشاره می‌کنند. علاوه بر این نیزیزی و کرابیسی خطوطی به صورت شکل «دوآب» و «مشیمه» و «لولبیه» معرفی کرده‌اند که منظور از آنها منحنی‌هایی چون خطوط مارپیچ و حلزونی

۱. قال اقلیدس: الخط طول لا عرض له. قال احمد: قد تقدم قولنا ان الخط اما هو حادث من حركة النقطة التي غير الجهة التي تكون بها. والنقطة ليست ذات مقدار، فواجب أن يكون الخط لا عرض له. إذ كان الخط إنما هو بُعد حركة النقطة عن الجهة التي يكون بها إلى الجهة التي حركت إليها. فهو ذو بعد واحد. إذ كانت النقطة عن حركتها حدث لا بعد لها ليس تحدث بحركتها غير بعد واحد وهو البعد الذي بحركت النقطة إليه. و بایجاز أقول: إن الخط هو أول المقادير التي تذكرها حس البصر من جهة المحاورة بغيره بأن تكون نهاية بها فأما على انفراد من غيره. فليس هو محسوس كالفرق بين الظل والشمس أو كالفرق بين التولين مختلفين متصلين. فإن الفرق بين الظل والشمس هو بعد لا عرض له، لأنه لو كان له عرض يكان ذلك العرض يكون إما من الشمس وإما من الظل وليس الأمر كذلك لأن الفرق بينهما ليس هو واحد منهما فالفرق بينهما هو خط إذ كان إنما هو طول لا عرض له.

۲. قطوع المخروطات التي هي مكافئ والزائد والناقص.

است.^۱ برنتیس با یافتن مترادف یونانی این واژه‌ها در متون یونانی این امکان را در نظر گرفته که صورت عربی واژه‌ها از ترجمه متون یونانی اقتباس شده است (۴۳). کرابیسی در ادامه تعاریف دیگری از خط راست می‌آورد و در نهایت می‌گوید تعریف اقلیدس بایسته‌ترین تعریف است (نسخه رشت، ۷-۹؛ نیریزی، نسخه قم، شماره ۶۵۲۶، گ. ۱۰-۱۷):

حکایت شده است که [اقلیدس] گفته است: تعریف خط مستقیم موضوعی بر هم‌ترازی هر دو نقطه واقع بر یک خط است. به گفته او می‌افزایم که خط مستقیم موضوعی بر هم‌ترازی بعد هر دو نقطه واقع بر یک خط و به معنای همسانی است. و تعریف ارشمیدس: «خط مستقیم کوتاه‌ترین خط بین دو نقطه است»، و افلاطون:^۲ «خط مستقیم خطی است که میان دو سرش را می‌پوشاند»، و تعریف دیگر: «خط مستقیم در غایت ترتیب است»، و تعریف دیگر: «خط مستقیم در هر جهت به گونه‌ای هموار بر نقاط خودش قرار دارد» و تعریف دیگر: «خط مستقیم خطی است که نه‌ایاتش ثابت است، و مثل محور از موضعش جابه‌جا نمی‌شود»...، باید توجه داشت که تعریف اقلیدس در میان همه تعاریف ویژه و مجاب‌کننده است.^۳

بسیط

طبق تعریف اقلیدس، «رویه آن است که فقط طول و عرض دارد». کرابیسی می‌گوید «آنچه طول و عرض دارد» لازمه تعریف بسیط است. بسیط دو بعد دارد و

۱. ... فمنها خطوط التي في صورة شكل الدواب و مثل الخطوط التي في صورة شكل المشيمة وغير ذلك مما لا يحصى كثيرة... والخطوط اللولبية و خطوط آخر مثل هذه كثيرة يعرض فيها اشياء عجيبة... (نسخه رشت، ۹).

دواب به معنای حیوانات سوارکاری، مشیمه شاید به معنای جفت جنین و لولبیه از ریشه لولب به معنای خطوط مارپیچی یا حلزونی شکل است.

۲. تعریفی که کرابیسی از قول افلاطون عرضه کرده است دقیقاً همان تعریفی است که پروکلوس در شرح اصول آورده است (برنتیس، ۳۳).

۳. فإنه قدحكي عنه أنه قال الخط المستقيم هو الموضوع على المساوي لما بين كل نقطتين واقعتين عليه نريد به القول إنه الموضوع على البعد المساوي لما بين كل نقطتين واقعتين عليه و قوله الموضوع هو بمعنى المطابق. وأما ارشميدس: فإنه حد الخط المستقيم هو أقصر خط وصل بين نقطتين. وأما افلاطون: فإنه حد المستقيم بأن يقال الخط هو الذي يستمر وسط طرفيه. و حده آخرون الخط المستقيم بأن قالوا الخط المستقيم هو الذي في غاية الترتيب. و حده آخرون أيضاً: بأن قالوا الخط المستقيم هو الذي أجزأه كلها من شأنها أن تطابق بعضها بعضاً من كل الجهات. و حده آخرون: يقالوا الخط المستقيم هو الذي إذا ثبتت نهايتاه ثبت هو أيضاً فلم ينتقل من موضعه كالمحور. وليس هذا في المنحنية. و قد ينبغي أن يعلم إن الحد الذي حده اقلیدس خط مستقيم هو أخص وأوجب من جميع الحدود التي حده بها غيره وذلك.

واژه «فقط» برای تأکید بر آن است که «بسیط» فقط طول و عرض است و نه چیز دیگر (یعنی ارتفاع)، چون جسمی که سه بعد دارد علاوه بر طول و عرض، ارتفاع نیز دارد (نسخه رشت، ۹-۱۰):

می‌دانیم بسیط از حرکت خط ایجاد می‌شود و خط طبعاً مقدم بر بسیط است، زیرا بسیط از حرکت خط ایجاد می‌شود. اما خرمیدس^۱ <کذا> می‌گوید: «بسیط همان مقداری است که دو بعد دارد، همانطور که جسم مقداری است که سه بعد دارد. اسم بسیط از زبان یونانیان از ظهورای گرفته شده که همان ظاهر جسم است که به واسطه آن دیده شود».

اصل موضوع (مصادره) پنجم مقاله اول اصول اقلیدس

پس از اینکه کرابیسی منحرف (چهارضلعی با دو ضلع موازی) و خطوط مستقیم موازی را تعریف می‌کند، مطلب را به بحث مصادرات پیوند می‌زند. او می‌گوید: «وقتی اقلیدس از تعاریف ضروری مقدماتی فارغ شد، پنج مصادره (اصل موضوع) را معرفی کرد». کرابیسی سه مصادره اول را «صناعت ممکنه غیرممتنع من الامکان» نامید. این اصول عبارتند از: ۱- از هر دو نقطه متمایز، یک و تنها یک خط راست می‌گذرد، ۲- هر پاره خط را می‌توان تا بی‌نهایت روی خط راست امتداد داد و ۳- با یک نقطه به عنوان مرکز و یک پاره خط به عنوان شعاع می‌توان یک دایره رسم کرد. کرابیسی می‌گوید شایسته است متعلم دو اصل بعدی را پس از تحقیق بپذیرد: ۴- همه زوایای قائمه با هم برابرند، و ۵- اصل توازی (نسخه رشت، ۲۲). کرابیسی یادآور شده است که در مصادره پنجم، منظور اقلیدس دو خطی است که در یک صفحه مستقیم [یا اقلیدسی] قرار دارند^۲ (نسخه رشت، ۲۵-۲۶):

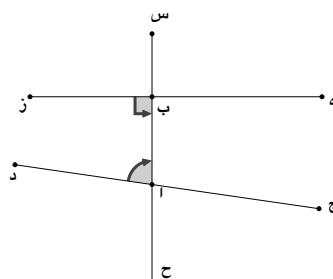
پیشینیان بر این مصادره برهان‌های گوناگونی آورده‌اند و در برهان‌های خود از قضایایی از مقاله اول و قضایایی که در کتاب اقلیدس نیست بهره برده‌اند، اما ترتیب قضایا بر خلاف موضعی است که اقلیدس گفته است و با

۱. منبع یونانی برای تعریف بسیط از قول مؤلفی به نام خرمیدس یافت نشده است (برنتیس، ۳۳).

۲. إذا وقع خط مستقیم علی خطین مستقیمین فیصیر فی أحد الجهتين الزاويتین الداخلتین اصغر من قائمتین فإن الخطین المستقیمین إذا أخرجوا فی تلك الجهة فإنهما يلتقيان.

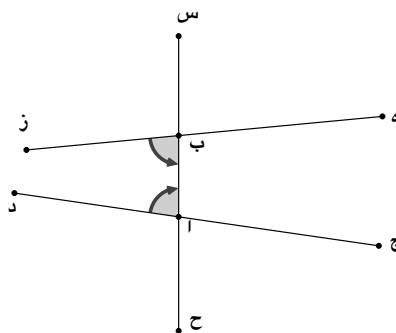
استفاده از آنها مقدمات براهین را فراهم کرده‌اند. اینجا آن براهین را حذف می‌کنم، چون غرض از کتاب ما روشنگری برای فهم آسان‌تر است. کرایبسی برهان اصل پنجم را در سه حالت آورده است: وقتی یکی از دو زاویه ایجاد شده از برخورد خط با دو خط داده شده قائمه باشد؛ وقتی دو زاویه ایجاد شده حادث باشند؛ و وقتی یکی از دو زاویه ایجاد شده منفرجه باشد (نسخه رشت، ۲۲-۲۷).

[مصادره پنجم مقاله اول]: خط مستقیم ab بر دو خط cd و ez واقع شده است. اگر در سمتی که [نقاط] d و z قرار دارند، دو زاویه که [مجموعشان] کوچک‌تر از دو قائمه است پدید آیند، آنگاه وقتی دو خط cd و ez تا بی‌نهایت در جهت d و z امتداد یابند، ناگزیر یک‌دیگر را قطع می‌کنند. برهان: خط ab را در دو جهت بر یک راستا تا نقاط h و s امتداد می‌دهیم. [حالت اول]: فرض می‌کنم زاویه b (در جهت z) قائمه باشد. اگر [مجموع] دو زاویه داخلی در جهت d و z کمتر از دو قائمه و زاویه b قائمه باشد، پس زاویه a کوچک‌تر از قائمه می‌شود. و میل خط da به سمت s بیشتر از میل آن به سمت h است. و خط zb قائم بر خط hs (همان عمود بر خط hs) به هیچ سمتی میلی ندارد. پس خط bz وقتی در راستای خودش امتداد می‌یابد، به یکی از دو جهت مایل می‌شود. اما خط ad وقتی بر راستای خودش امتداد می‌یابد به جهت s مایل می‌شود. و [اد] با خط bz در یک صفحه مستقیم قرار دارد، بنا بر این خط bz را قطع می‌کند. و وقتی بیشتر امتداد یابد، میل [اد] زیاد می‌شود [شکل ۱].



شکل ۱

[حالت دوم]: فرض می‌کنیم هر یک از دو زاویه داخلی از جهت د و ز حاده باشند. بنا بر این هر یک از دو خط بز و اد که بر راستای خود ادامه می‌یابند، میلی به سوی یکدیگر دارند. و اگر تا بی نهایت امتداد یابند ناگزیر یکدیگر را قطع می‌کنند [شکل ۲]



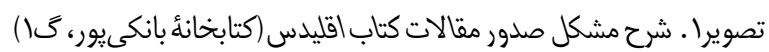
شکل ۲

[حالت سوم]: و همچنین فرض می‌کنیم یکی از آن دو زاویه منفرجه باشد، یعنی همان که بر نقطه ب به سمت ز است. پس [مجموع] آن زاویه منفرجه با زاویه ای که بر نقطه ا است کوچک تر از دو قائمه است. و در قضیه ۱۳ مقاله اول^۱ گفته شده است که [مجموع] دو زاویه داخلی و خارجی در نقطه ب (در کنار خط بز) مساوی با دو قائمه است. میل خط دا^۲ به سمت س بیش تر از میل خط زب^۳ است. پس باید میل خط دا وقتی بر راستای خود (به سمت س) ادامه می‌یابد بیش تر از میل خط زب وقتی بر راستای خود (به سمت س) ادامه می‌یابد باشد. پس فاصله دو خط اد و بز وقتی بر راستای خود ادامه می‌یابند نزدیک می‌شود و وقتی تا بی نهایت ادامه یابند یکدیگر را قطع می‌کنند [شکل ۳]. و آنچه می‌خواستیم.

۱. اگر خط راستی روی خط راستی واقع شود، یا دو زاویه قائمه می‌سازد یا دو زاویه که مجموعشان دو قائمه است.

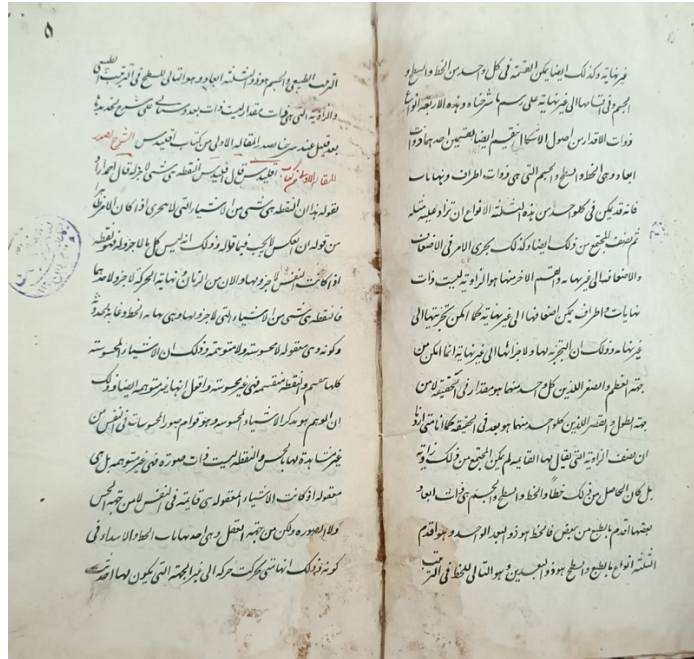
۲. نسخه: + قائم بر خط ح س

۳. نسخه: + قائم بر خط ح س

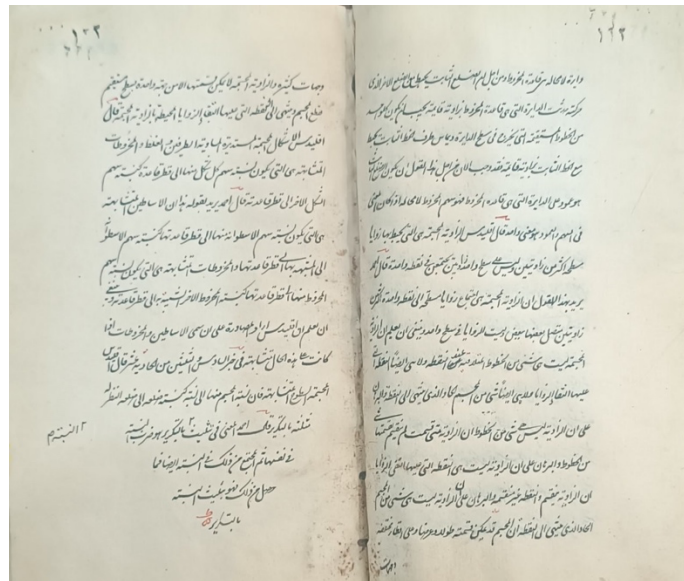


ان الجسم قد يكون قمته طولاً وعرضاً وعلى اقطار محله وجهات كثيرة
والراوية الجسم لا يمكن قمتها الا من جهة واحدة سطح مستقيم تقطع الجسم
وينتهي الى النقطة التي عليها النقا الزوايا المحيط بالراوية الجسم
قال اقليدس الاشكال الجسم المتديرة المياوية الطرفين
والخط والمخروطات المشابهة هي التي يكون نسبة سم كل شكل منها
الى قطر قاعدته كنسبة سم الشكل الآخر الى قطر قاعدته قال
يريد بقوله هذا ان الاساطير المشابهة هي التي يكون نسبة سم الاسطوانة
منها الى قطر قاعدتها كنسبة سم الاسطوانة الى المشبه بها الى قطر قاعدتها
والمخروطات المشابهة هي التي يكون نسبة سم المخروط منها الى قطر
قاعدتها كنسبة المخروط الآخر التسمية الى قطر قاعدته ونسبة ان
ان اقليدس اراد المصاحبة على ان تسمى الاساطير والمخروطات
اذا كانت على هذا الحال متشابهة في خواصها
من الكاوية عشر قال اقليدس الجسم السطوح المشابهة
الجسم منها الى نسبة كنسبة ضلعه الى ضلعه التفسير له مثله بالكثير قال
المعنى في ثلث النسبة بالكثير هو ضرب النسبة في نفسها ثم المجموع
في النسبة ايضا فما حصل من ذلك فهو ثلث النسبة بالكثير

تم كتاب احمد بن عمر الكراچی



تصویر ۳. شرح مشکل صدور مقالات کتاب اقلیدس (کتابخانه رشت، ۴ و ۵)



تصویر ۴. شرح مشکل صدور مقالات کتاب اقلیدس (کتابخانه رشت، ۱۳۲ و ۱۳۳)

رسالة مساحت الحلق

تاریخ موضوع حلقه‌ها که مرتبط با موضوع دایره در هندسه است با تاریخ ریاضیات ریشه مشترکی دارد. اصول اقلیدس، آثار ارشمیدس، مخروطات آپلونیوس و متریکالی هرون مباحثی در باره دایره دارند. در متریکالی هرون (III/126-128) تعریف دقیقی از حلقه آمده است. هرون نوشته است که دیونیسودوروس^۱ (ح. ۲۵۰ ق. م - ۱۹۰ ق. م) ریاضی‌دان یونانی اثری به نام در باره چنبره^۲ داشته است. در این اثر، دستور حجم حلقه برابر است با مساحت دایره مؤلد ضرب در طول محیط دایره‌ای که توسط مرکز دوران پیموده می‌شود. بدیهی است دیونیسودوروس از کتاب روش^۳ ارشمیدس برای اثبات نتایج خود بهره برده است (هیث، ۲۱۸، ۲۱۹). پرسئوس^۴ (دو قرن پیش از میلاد) و پروکلوس^۵ (ح. ۴۱۱ - ۴۸۵ م) تعریف حلقه را در آثار خود آورده‌اند و پاپوس اسکندرانی (۲۹۰ - ۳۵۰ م) قضایایی برای محاسبه سطح و حجم حلقه‌ها عرضه کرده است (هیث، ۲۰۳ - ۲۰۶).

پاپوس در مقاله هفتم اثر ارزشمند خود، مجموعه ریاضی، صورت اولیه قضیه مرکز هندسی را که بعداً گولدین^۶ (۱۵۷۷ - ۱۶۴۲ م) ارائه داد نوشته است. قضیه اول پاپوس می‌گوید: «اگر یک قوس مستوی حول محوری در صفحه منحنی که ضمناً منحنی را قطع می‌کند دوران داده شود، مساحت سطح دوازی که بدین ترتیب تشکیل می‌شود برابر است با حاصل ضرب طول قوس و طول مسیری که به وسیله مرکز ثقل قوس پیموده می‌شود». قضیه دوم پاپوس در باره محاسبه حجم حلقه است و می‌گوید: «اگر سطحی مستوی حول محوری در صفحه‌اش، که سطح را قطع می‌کند دوران داده شود، حجم جسم دوازی که بدین ترتیب تشکیل می‌شود برابر است با حاصل ضرب آن سطح در طول مسیری که به وسیله مرکز ثقل آن سطح پیموده شده است» (ایوز، ۱۸۴/۱، ۲۰۳). با استفاده از این قضایا می‌توان مساحت رویه و حجم چنبره‌ای را که از دوران دایره‌ای به شعاع r حول

1. Dionysodorus

2. *On the (Spire) or Tore*

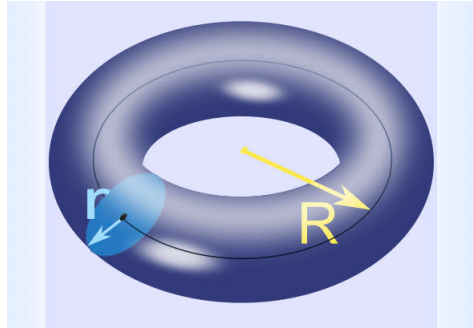
3. *Methods*

4. Perseus

5. Proclus

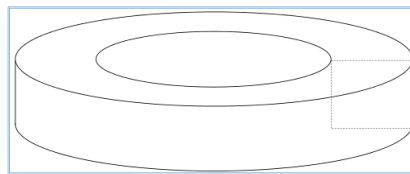
6. Guldin

محوری واقع در صفحه دایره و به فاصله $R > r$ از مرکز دایره تشکیل می شود، به دست آورد: $A = (2\pi r)(2\pi R) = 4\pi^2 rR$ و $V = 2\pi R \pi r^2$ (شکل ۴).



شکل ۴. حلقه مستدیره الغلظ یا چنبره^۱

همچنین، طبق این قضیه مساحت رویه و حجم جسم حاصل از دوران یک سطح مربعی حول محور مرکزی عبارت است از $A = 2\pi R^2 a$ و $V = 2\pi R a^2$ که a ضلع مربع مولد و R شعاع دوران است (شکل ۵).



شکل ۵. حلقه مربعه الغلظ یا چنبروار

رساله مساحت الحلق کرابیی که از آثار منحصر به فرد دوره اسلامی است دو مقاله دارد. در صدر هر مقاله تعاریف و سپس قضایایی با عرضه براهین هندسی آمده است. مقاله اول در باره شکل هندسی مسطح مطوق^۲ است. در صدر مقاله اول تعریف مطوق یعنی سطح بین دو دایره متحدالمرکز و در ادامه ۱۸ قضیه آمده و در مواردی به اصول اقلیدس ارجاع داده شده است.

۱. شکل برگرفته از سایت mathisfun است.

2. Annulus

مطوق = طوق، تاج

مقاله دوم شامل تعریف و ۷ قضیه مربوط به «حلقه مستدیره الغلط»^۱ و «حلقه مربعه الغلط» است. «حلقه مستدیره الغلط» را امروزه چنبره^۲ می نامیم. این حلقه نوعی رویه دورانی است که از طریق دوران یک دایره در فضای سه بعدی، حول یک محور که با دایره هم صفحه است ایجاد می شود (شکل ۴). «حلقه مربعه الغلط» شکلی هندسی است که از دوران یک مربع حول محور مرکز دایره پدید می آید که با چنبره تفاوت دارد^۳ و امروزه آن را چنبروار می نامیم (شکل ۵).

آشنایی مؤلف با اصول اقلیدس کاملاً مشهود است. برای مثال در مقاله اول، قضیه ۷ و مقاله دوم قضیه ۱ به قضایایی از اصول اشاره شده است (نک: دنباله مقاله). بسل و هاگن (۱۹۳۱) معتقدند توضیحات مؤلف در مقاله دوم در باره حلقه ها فروتر از جایگاه ممتاز اوست و تعاریف او را متفاوت از تعاریف دقیق ریاضی دانان یونانی دانسته اند (۵۰۴، ۵۰۵). بسل و هاگن نشان دادند که کرابیسی در اثبات قضایا چه تعاریف یا قضایایی از اصول را به کار گرفته است (۵۳۹-۵۲۳). همچنین در پایان، تبارنامه قضایای رساله (اینکه کدام قضیه در اثبات کدام قضیه استفاده شده) به صورت جدول ۱ عرضه شده است (بسل - هاگن، ص ۵۴۰؛ در ستون تبار قضایا عددی که با ارقام رومی نوشته شده است شماره مقاله را در اصول و عدد دیگر شماره قضیه را نشان می دهد).

جدول ۱. تبارشناسی قضایای مساحه الحلق

قضیه	تبار	قضیه	تبار
۱-۱	I/۲	۱۳-۱	II/۶
۲-۱	I/۳ تا I/۷	۱۴-۱	I/۱۸
۳-۱	I/۴	۱۵-۱	-
۴-۱	II/۳	۱۶-۱	II/۷
۵-۱	II/۳ و II/۵	۱۷-۱	I/۱۸
۶-۱	I/۸	۱۸-۱	-

۱. غلط = ضخامت

2. Torus

۳. به این منحنی ها Toroid می گویند. Torus یک نوع Toroid است.

قضية	تبار	قضية	تبار
۷-۱	-	۱-۲	II/۲
۸-۱	-	۲-۲	II/۳ (?)
۹-۱	I/۱۱ و I/۱۶ و I/۱۷	۳-۲	II/۵
۱۰-۱	I/۱۶ و I/۱۷	۴-۲	-
۱۱-۱	I/۱۲ و I/۱۴	۵-۲	II/۶
۱۲-۱	I/۱۵	۷-۲	-
		۸-۲	-

مقاله گندز (۱۹۳۳) در باره عنوان، ریشه‌شناسی واژه‌های مهم و تخصصی به‌کار رفته در مساحة الحلق نظیر معنای ضرب، مقدار، سطح، مساحت، مطوق، حلقه و مواردی دیگر در تکمیل شرح بسل - هاگن است (۹۹-۱۰۵).

تصحیح و ترجمه رساله مساحة الحلق

پیش‌تر اشاره شد که این رساله در ۱۹۳۱ تصحیح و به زبان آلمانی ترجمه و شرح شده است. در تصحیح بسل و هاگن اشکالاتی دیده می‌شود.^۲ پیچیدگی‌هایی در خواندن متن تخصصی مساحة الحلق وجود دارد؛ مثلاً «دایره ا ج» با توجه به متن می‌تواند نشان‌دهنده نام دایره، اندازه مساحت یا قطر دایره باشد. همچنین «ا ج» می‌تواند نشان‌گر طول پاره خط، یا مربعی با دو رأس مقابل ا و ج یا نام دو نقطه ا و ج یا نام دو دایره ا و ج یا نام حلقه یا مطوق باشد. گویا بسل و هاگن بر مبنای خطاهای خواندن متن ادعا کرده‌اند که راببسی بخشی از متن را بدون آگاهی از تعاریف تخصصی ریاضی و یافته‌های ریاضی دانان یونانی نوشته است (۵۰۴).

تصحیح بسل و هاگن بر اساس نسخه‌های آکسفورد و قاهره است. در جدول ۲ فهرست نسخه‌های در دسترس برای تصحیح حاضر آمده است. در ادامه کوشش شده است تصحیح بهتری از متن عربی مساحت الحلق عرضه شود و نیز متن آن به فارسی ترجمه شود. در اغلب موارد شرح ریاضی پیچیده‌ای لازم نیست، اما در صورت نیاز در پانویس توضیح مختصری نوشته شده است.

1. Solomon Gandz

۲. برای مثال، به چند نمونه اشاره می‌شود: «... وهما القطران التي هي كنسبة الدائرتين الثالث و أحد القطرين بل هما الخطان مطلوبان» به صورت: «... فتالث واحد القطرين...» (پیوست، مقاله اول، [۹])، و دو دایره ج [و] ه به صورت دو دایره ح ه (پیوست، مقاله اول، [۱۱]) خوانده شده است.

نسخه خطی شماره ۲۴۳۲ دانشگاه تهران اقدام و اصح نسخ است. با در نظر گرفتن اینکه زمان کتابت باقی نسخه‌ها بسیار به یکدیگر نزدیک است، متن حاضر با توجه به کامل و خوانا بودن متن‌ها و شکل‌ها به ترتیب بر اساس نسخه‌های شماره ۲۴۳۲/۱۴ دانشگاه تهران، جارالله، ایاصوفیه، آکسفورد و شماره ۱۷۹۰ دانشگاه تهران تصحیح شد (جدول ۲). در هیچ‌یک از نسخ، تاریخ تحریر یا تألیف مساحه الحلق نوشته نشده است، اما چون همه این نسخ بخشی از یک مجموعه‌اند، تاریخ‌ها به قرینه رسائل دیگر آن مجموعه تخمین زده شد. همه مجموعه‌های شامل مساحه الحلق، رسائل مهم دوره اسلامی و ترجمه آثار یونانی از ریاضی دانانی چون ثابت بن قره، بنوموسی، خواجه نصیرالدین طوسی و ... را در بر دارند و این نشان از اهمیت رساله مساحت الحلق دارد.^۱

در تصحیح انتقادی، رسم الخط امروزی به کار گرفته شد. شماره صفحات بر اساس نسخه خطی ۲۴۳۲ دانشگاه تهران بین دو علامت «/» و به صورت پررنگ مشخص شد. عنوان‌ها و سرفصل‌ها و قضایا که پشت سرهم نوشته شده بود در سطرهای جدا قرار گرفت و پاراگراف‌بندی شد و پاراگراف‌ها شماره گذاری شد. تفاوت متن‌ها با علامت «+» و «-» در پانویس مشخص شد. از علامت «[» برای جدا کردن نوشتار نسخه‌ها استفاده شد.^۲

۱. فهرست‌نویس مجموعه ۲۴۳۲ دانشگاه تهران به اهمیت و یکتایی رساله‌های این مجموعه اشاره کرده است: «مجموعه رسائل ریاضی که در سنه ۶۹۵ و از روی خط مؤلف تحریر شده، ۱۶ رساله به شرح فهرست علاوه از قدمت و صحت و اصالت نسخه، چند رساله هست که عذیم‌النظیر است ... من جمله ... تألیف کرابیسی ... که در نهایت اهمیت است» (نسخه خطی ۲۴۳۲، ۱).

۲. برای مثال، فسطح المَطَوَّق] - ۱۵، - ج، یعنی عبارت فسطح المَطَوَّق در نسخه دانشگاه تهران ۱ و جارالله نیامده است.

جدول ۲. نسخه‌های به‌کار گرفته شده در تصحیح مساحة الحلق

علامت اختصاری	کتابخانه	برگ‌ها- صفحه‌ها	سال
د	دانشگاه تهران ۱۲۴۳۲/۱۴	ص ۱۳۷-۱۴۱	۶۹۵
آ	ایاصوفیه شماره ۲۷۶۰	گ ۵۷پ-۵۹پ	قرن ۹
ج	جاء الله ۱۵۰۲/۱۱	گ ۴۹پ-۵۲ر	قرن ۹
ت	آکسفورد (تورستون)	پ ۵۳-۵۵ر	قرن ۹
د	دانشگاه تهران ۱۷۹۰ ^۲	ص ۱۶۵-۱۶۰	قرن ۸ یا ۹

واژه‌شناسی رساله مساحت الحلق

چند واژه که در این متن به‌کار رفته‌اند در اینجا تعریف شده‌اند:

مطوق: در فارسی تاج نامیده می‌شود و سطح بین دو دایره متحدالمرکز است.
حلقه: ابن هیثم ضمن بحث در باره اینکه تصور فرد از محدب یا مقعر بودن به جهت و نهایت سطح مستدیر بستگی دارد، به این پرسش که خط واحدی می‌تواند هم محدب و هم مقعر در نظر گرفته شود چنین پاسخ داده است: «خط محدب، مقعر نیست بلکه نهایت سطح مستدیری است که تخیل آن منفرد و مفارق از سطح مستدیر ممکن نیست و جزیی از سطح مستدیر است که نباید منفرد از سطح در نظر گرفته شود. علتی که تخیل ما را از خط مستدیر منفرد و جدای از سطح ممکن می‌کند همان است که از اجسام مستدیری به نام حلقه یعنی اجسام مستدیری که درون آنها خالی است درک می‌شود. تصور شکل حلقه به خودی خود به صورت محیط دایره است. درک ما از دایره و حلقه شبیه است. یعنی محیط دایره منفرداً شبیه حلقه است (تفسیر مقاله ۳ اصول، ابن هیثم، ۲۲۸؛ نسخه رشت، ۲۳۵-۲۳۶).»

غلظ: واژه غلظ^۳ را ابن هیثم و کرابیسی در شرح صدر مقاله یازدهم اصول، در تعریف استوانه با دو قاعده مساوی و ضخامت یکسان و در تعریف مخروط

۱. فهرست کتابخانه مرکزی دانشگاه تهران، ج ۹، ۱۰۹۹

۲. فهرست کتابخانه مرکزی دانشگاه تهران، ج ۸، ۳۵۴

۳. معنی غلظ در فارسی: ضخامت، ستبری؛ الغلظ در هندسه به زبان عربی: یعنی به العرض والسمک (ابن هیثم، ۴۲۴)

به کار برده‌اند.^۱ همان طور که گفته شد کرابیسی در مقاله دوم «حلقه مستدیره الغلط» و «حلقه مربعه الغلط» را به ترتیب برای جسم‌های دوار چنبره و چنبروار به کار برده است (نک: متن ترجمه شده مساحت الحلق)؛ حلقه‌ای که از دوران دایره مولد حول محور مرکزی ایجاد می‌شود و حلقه‌ای که از دوران مربع مولد حول محور مرکز دایره تولید می‌شود. چنبروار رویه دورانی است که حفره‌ای وسط آن است، مثل دونات یا تایر. اگر مربعی دور محوری موازی یکی از اضلاعش دوران یابد حلقه خالی با مقطع مربعی تولید می‌شود و اگر شکل دوران یافته دایره باشد چنبره ایجاد می‌شود.

مساحت حلقه: با توجه به دستورها و رویه‌های قضایای مقاله دوم مقصود حجم حلقه‌ها است.

شماری دیگر از واژه‌ها و عبارات به کار رفته در این رساله که دانستن آنها برای درک بهتر متن مفید است، در جدول ۳ آمده است.

جدول ۳- برخی واژه‌ها و عبارات به کار رفته در متن مساحت الحلق

واژه / عبارت	معنی / توضیح	واژه / عبارت	معنی / توضیح
دایرتین متوازیتین	دو دایره متحدالمرکز	تکسیر	مساحت
ثلث	ثلاث	إلی ب مثناه	مربع نسبت ۱ به ۳
فلیکن مربعا ب، ز ح	یعنی مربع ۱ برابر ز و مربع ب برابر ح است.	دایره ا ج	مساحت دایره ا ج یا محیط دایره ا ج
۱ ضرب فی نفسه و فی ج	یعنی مربع ۱ در ج	مقدار	به هر یک از قطر، محیط و مساحت دایره‌ها مقداری نسبت داده شده و آن مقدار با یک طول نشان داده شده است. به این ترتیب بین این مقادیر نسبت‌هایی تعریف شده است.

۱. «ثم قال اقلیدس: الشكل المجسم المستدير الذي قاعدته دائرتان متساويتان، و هو المتساوي الغلط هو ما يحوزه سطح متوازي الاضلاع قائم الزوايا» (ابن هیثم، ۴۲۰). قال اقلیدس الأشكال المجسمة المستدیره المساوية الطرفين والغلط والمخروطات المتشابهة هي التي يكون نسبة سهم كل شكل منها إلي قطر قاعدته كنسبة سهم الشكل الآخر إلي قطر قاعدته» (ابن هیثم، ۴۲۴، نسخه رشت، ۱۳۳، مقاله یازدهم).

واژه / عبارت	معنی / توضیح	واژه / عبارت	معنی / توضیح
دایر تین ک آج، بد	دو دایره برابر اج و بد	مسطح الاول فی الثالث	مسطحی که از ضرب مقدار ۱ (قطر) در مقدار ج (محیط) حاصل می شود. مساحت این سطح ۴ برابر مساحت دایره است.
اج المطوق	مطوق اج	نسبت دو دایره	نسبت مساحت های دو دایره یا نسبت محیط های دو دایره
بسیط مستوی	سطح	عمل کنیم	رسم کنیم
معمول	رسم شده	ا در ج	ا ضرب در ج
ف و ا ل ج	پس نسبت و به ج	اج د مع ج ه ز	اج د به اضافه ج ه ز
دائرتی ج، ه	دو دایره ج و ه	ادج	محیط دایره ج و ه



تصویر ۵. مساحت الحلق دانشگاه تهران، ۱۴/۲۴۳۲ (گ ۱۳۹ پ-۱۴۰)

ترجمه رساله مساحت الحلق

مقاله اول از کتاب مساحت حلقه‌ها

مقدمه: سطح بین دو دایره هم‌مرکز را سطح مطوق و تفاضل نصف قطر دایره بزرگ از نصف قطر دایره کوچک را قطر مطوق می‌نامیم.

قضیه ۱: اگر برای هر چهار مقدار [۱، ب، ج، د]، نسبت اولی در سومی یعنی ۱ در ج (که برابر ه است) به دومی در چهارمی یعنی ب در د (که برابر و است، برابر با مربع نسبت اولی به دومی یعنی مربع نسبت ۱ به ب باشد، آنگاه نسبت اولی به دومی برابر نسبت سومی به چهارمی است) [شکل ۱].^۲

اگر مربع ۱ برابر ز و مربع ب برابر ح باشد، آنگاه نسبت ز به ح برابر مربع نسبت ۱ به ب و برابر نسبت ه به و است. پس به ابدال نسبت،^۳ نسبت ه به ز برابر و به ح است. چون ضرب ۱ در ۱ برابر ز، و ضرب ۱ در ج برابر ه است، پس نسبت ه به ز برابر نسبت ج به ۱ است. پس نسبت و به ح برابر نسبت ج به ۱ است. و چون ضرب ب در ب برابر ح، و ضرب ب در د

۱. از قضایای بعدی استنباط می‌شود که قطرهای و محیط‌های مطوق چهار کمیت (مقدار) در نظر گرفته شده است تا بتوان نسبت‌هایی میان آنها را تعریف کرد. پس از این، بر اساس این کمیت‌ها، کمیت‌های دیگری به مثابه مساحت و مربع قطر دو دایره معرفی شده (جداول زیر) و به ازای هریک از آنها پاره خطی تعریف شده است.

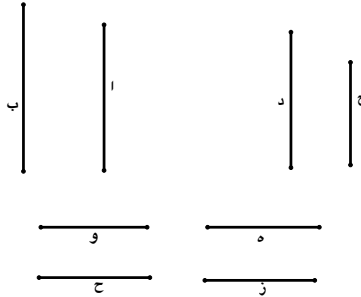
اولی	دومی	سومی	چهارمی
۱	ب	ج	د
$2r$	$2r'$	$P = 2\pi r$	$P' = 2\pi r'$

۱ در ج	ب در د	مربع ۱	مربع ب
ه	و	ز	ح
$S = 4\pi r^2$	$S' = 4\pi r'^2$	$4r^2$	$4r'^2$

۲. در ترجمه رساله شماره‌گذاری شکل‌ها از ۱ شروع شد.

۳. (اصول، ۷، تعریف ۱۲)، ابدال نسبت: $\frac{x}{y} = \frac{z}{t} \Rightarrow \frac{x}{z} = \frac{y}{t}$

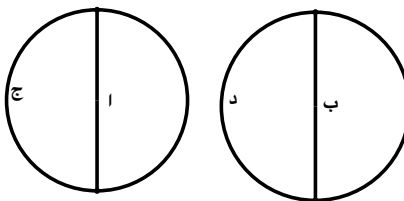
برابر و است، پس نسبت و به ح یعنی نسبت ج به ا برابر نسبت د به ب است. پس به ابدال نسبت، نسبت ج به د برابر نسبت ا به ب است - آنچه می خواستیم.



[شکل ۱]

قضیه ۲: در هر دو دایره اج و بد،^۱ اگر نسبت محیط یکی به محیط دیگری برابر ج به د باشد، آنگاه نسبت محیط ها برابر است با نسبت قطر ها یعنی ا به ب.

چون نصف ا در نصف ج برابر مساحت دایره اج است، پس ا در ج چهار برابر [مساحت] اج است، و نیز ب در د چهار برابر [مساحت] بد است. و نسبت [مساحت] اج به [مساحت] بد مثل مربع نسبت ا به ب است. و می دانیم نسبت اجزا به اجزا برابر با نسبت اضعا ف^۲ [به اضعا ف] است. پس چهار برابر [مساحت دایره] اج به چهار برابر [مساحت دایره] بد برابر با مربع نسبت ا به ب است. پس ا، ب، ج و د چهار مقداری اند که [با توجه به آنها] نسبت مسطح اولی [ا] در سومی [ج] به مسطح دومی [ب] در چهارمی [د]^۴ برابر است با مربع نسبت اولی [ا] به دومی [ب]. پس قطر ا به قطر ب برابر با محیط دایره اول یعنی ج به محیط دایره دوم یعنی د است - آنچه می خواستیم [شکل ۲].



[شکل ۲]

۱. اج و بد نام دو دایره است.

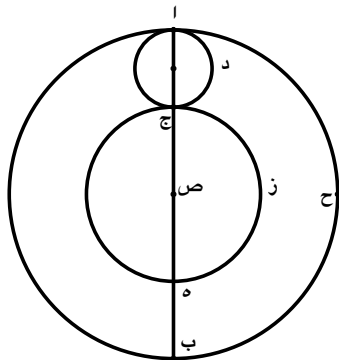
۲. اضعا ف: چند برابر (اصول، ۷، تعریف ۵)، $\frac{a}{b} = \frac{ka}{kb}$.

۳. از ضرب دو طول یعنی ا و ج سطح مستطیلی به طول و عرض $2\pi r$ و $2\pi r'$ پدید می آید که مساحتش چهار برابر مساحت دایره به شعاع r است: $S = 2r \cdot 2\pi r = 4\pi r^2$.

۴. همین طور $S' = 2r' \cdot 2\pi r' = 4\pi r'^2$.

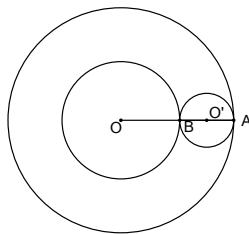
قضیه^۳: در صفحه مسطح، تفاضل محیط دایره بزرگتر (از دو دایره متحدالمرکز) یعنی احب^۱ از محیط دایره کوچکتر یعنی جزه با دو برابر محیط دایره واقع در سطح مطوق^۲ میان آن دو دایره یعنی ادج برابر است.^۲

چون نسبت ادج^۳ به جزه مثل ادج^۴ به جده^۵ است، پس دو برابر نسبت ادج به جده مثل دو برابر نسبت ادج به جزه است. پس به ترکیب نسبت^۶، نسبت اب به جده یعنی ابح به جزه برابر با دو برابر نسبت اجد به اضافه جده به جزه است. پس دو برابر نسبت اجد به اضافه جده مساوی با ابح است. پس ابح برابر است با جده به اضافه دو برابر محیط اجد برابر است - آنچه می خواستیم [شکل ۳].



[شکل ۳]

۱. محیط دایره با سه حرف متوالی مثلاً ابج نامیده شده است.
۲. با دستورات ریاضی امروزی داریم: $OA = r$ $OB = r'$ $O'A = \frac{r-r'}{2}$ پس: $P - P' = 2\pi(r - r') = 2P_1$ محیط دایره بزرگتر، P' محیط دایره کوچکتر و P_1 محیط دایره واقع بین دو دایره مطوق است. این قضیه در قضایای بعدی به کار رفته و اثبات آن به کمک «ترکیب نسبت» گفته شده است.



۳. ادج یعنی محیط دایره ادج، که قطر آن اجد است.

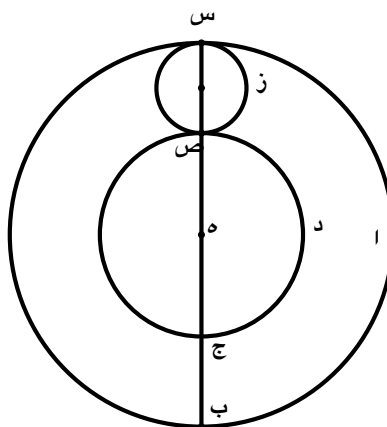
۴. طول قطر دایره ادج.

۵. طول قطر دایره جزه.

۶. (اصول، V، تعریف ۱۴)، ترکیب نسبت یعنی: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$

قضیه ۴: ضرب قطر مطوق یعنی S در نصف محیط‌های دو دایره متحدالمرکز یعنی S اب و S دج برابر با مساحت مطوق است.^۱

[اثبات]: چون نصف [محیط] S ب ۱ به اضافه نصف [محیط] S جد برابر با [محیط] S ص ز است و ضرب نصف [محیط] S دج در S ه^۲ همان مساحت S جد است و ضرب نصف [محیط] S اب در S ه برابر با مساحت [ص دج] به اضافه ضرب [محیط] S ز ص در S ه است. و نسبت نصف [محیط‌های] S اب، S دج برابر نسبت S ه، S ه است. پس به تفضیل نسبت،^۳ [نسبت دو برابر] S ص ز به S جد برابر نسبت S ص به S ه است. پس S ص ز در S ه برابر نصف S جد در S ص است. و ضرب نصف S اب در S ه برابر است با S دج به اضافه S ز ص در S ه. پس نصف S اب در S ه با S دج به اضافه S ص در نصف S دج برابر است. و S ه در نصف S اب برابر با مساحت S ب ۱ است. پس نصف S ب ۱ در S ص برابر است با سطح مطوق S ص منهای ضرب نصف S دج در S ص. پس ضرب نصف محیط‌های S اب و S دج در S ص یعنی قطر مطوق برابر با مساحت مطوق است - آنچه می‌خواستیم [شکل ۴].



[شکل ۴]

۱. اگر $r - r'$ قطر مطوق و S مساحت آن باشد، داریم:

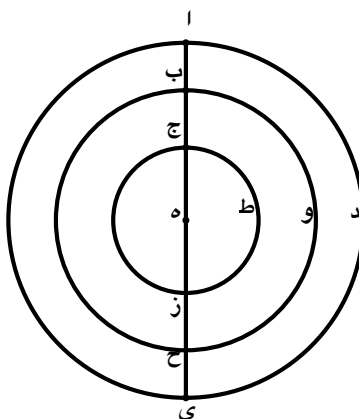
$$S = (r - r') \frac{1}{2} (2\pi r + 2\pi r') = \pi(r^2 - r'^2)$$

۲. S ه نصف قطر دایره S جد است.

۳. (اصول، V، تعریف ۱۵)، تفضیل نسبت یعنی: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$

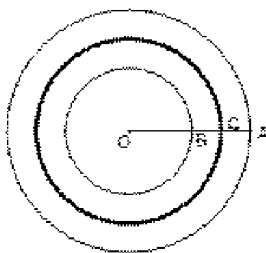
قضیه ۵: محیط دایره رسم شده در وسط سطح مطوق اج با نصف محیط دو دایره آن مطوق مساوی است.^۱

چون [محیط] ادی^۲ به [محیط] جطز مثل ای^۳ به جز است و نسبت جزء به جزء برابر نسبت اضعاف به اضعاف است،^۴ پس ای به جز برابر اه به جه است. و به ترکیب نسبت، نسبت ادی به اضافه جطز به جطز برابر از به جه است. پس نصف ادی به اضافه جطز به جطز برابر به به جه یعنی بوح به جطز است. پس محیط بوح رسم شده بر ب وسط مطوق اج برابر با نصف محیط دو دایره آن است. و آنچه می خواستیم [شکل ۵].



[شکل ۵]

۱. محیط دایره وسط (P_1) برابر است با: $P_1 = 2\pi\left(r' + \frac{r-r'}{2}\right) = \pi(r+r') = \frac{1}{2}(P+P')$ شعاع‌ها و محیط‌های دو دایره کوچک‌تر و بزرگ‌تر.



۲. ادی به معنای محیط دایره است.

۳. اندازه قطر دایره ادی

۴. اصول، ۷، تعریف ۵

قضیه ۶: می‌خواهیم دایره‌ای رسم کنیم که نسبت محیطش به محیط دایره مفروض برابر نسبت مفروضی باشد.^۱

نسبت خطی به قطر دایره مفروض را برابر نسبت مفروض قرار می‌دهیم. و بر آن دایره‌ای رسم می‌کنیم. پس نسبت محیط دو دایره برابر نسبت قطرهای دو دایره یعنی نسبت مفروض می‌شود - آنچه می‌خواستیم پدیدار می‌شود.

قضیه ۷: می‌خواهیم دو دایره رسم کنیم که نسبت محیط‌هایشان به محیط دایره مفروض برابر نسبت مفروضی باشد.^۲

پس مقدم نسبت را به دو قسمت دلخواه تقسیم می‌کنیم. و نسبت دو خط را به قطر دایره مفروض برابر نسبت دو قسمت مقدم نسبت به مؤخرش قرار می‌دهیم. و بر دو خط دو دایره رسم می‌کنیم. پس مطلوب از قضیه ۲۴ از مقاله ۵ اصول پدیدار می‌شود.^۳ و به این تدبیر ممکن است که سه دایره یا بیشتر رسم کنیم که نسبت مجموع محیط‌شان به محیط دایره مفروض برابر نسبت مفروض باشد - و آنچه می‌خواستیم.

قضیه ۸: می‌خواهیم دو دایره رسم کنیم که نسبت محیط آنها به محیط دو دایره مفروض برابر نسبت مفروضی باشد.^۴

دو دایره رسم می‌کنیم که نسبت یکی از آنها به یکی از دو دایره مفروض، برابر نسبت مفروض باشد و همچنین نسبت دو دیگر چنین باشد. پس نسبت دو دایره رسم شده به دو دایره مفروض برابر با نسبت یکی از آن دو به دایره نظیرش، یعنی نسبت مفروض است - و آنچه می‌خواستیم.

قضیه ۹: می‌خواهیم دو خط بیابیم که نسبت‌شان برابر نسبت دو دایره مفروض باشد.^۵ پس برای قطرهایشان در نسبت، [کمیت] سومی می‌یابیم. پس نسبت اولی به سومی برابر مربع نسبت اولی به دومی است.^۶ و آن دو [اولی و دومی] قطرهای دو دایره‌اند که

$$1. \frac{P}{p'} = k \Rightarrow \frac{r}{r'} = k$$

$$2. \frac{P+P'}{P} = k$$

۳. اگر نسبت یک کمیت اول به کمیت دوم مثل نسبت کمیت سوم به کمیت چهارم باشد و همچنین نسبت کمیت پنجم به کمیت دوم مثل نسبت کمیت ششم باشد به کمیت چهارم، نسبت مجموع اول و پنجم به دوم مثل نسبت

مجموع سوم و ششم است به چهارم (اصول، ص ۱۲۳) به بیان ریاضی یعنی:

$$\frac{a}{c} = \frac{d}{f} = \frac{b}{c} = \frac{e}{f} \Rightarrow \frac{a+b}{c} = \frac{d+e}{f}$$

$$(اصول، V، قضیه ۱۲) \frac{P+P'}{P_1+P_2} = k. 4$$

$$5. \frac{a}{b} = \frac{S}{S'}$$

نسبت آنها برابر نسبت [محیط‌های] دو دایره است. پس سومی و یکی از دو قطر همان دو خط خواسته شده‌اند.

قضیه ۱۰: می‌خواهیم دایره‌ای رسم کنیم که نسبتش به دایره مفروض برابر نسبت مفروضی باشد.

پس در نسبت، [کمیت] وسطی را بین دو حد نسبت مفروض اخراج می‌کنیم. و نسبت یک خط به قطر [دایره] مفروض را برابر نسبت اولی از دو حد نسبت به وسطی نسبت قرار می‌دهیم. و بر خط، دایره‌ای رسم می‌کنیم. پس آن [دایره] مطلوب باشد. و برهانش پدیدار است.

قضیه ۱۱: می‌خواهیم دایره‌ای مساوی دو دایره مفروض ج و ه رسم کنیم.^۱
پس اب [و] ح را بر اساس نسبت آن دو دایره می‌یابیم. آنگاه به ترکیب نسبت، نسبت ج به ه برابر با نسبت اب به ح است، ولیکن بع برابر آن دو^۲ به ح است. و د را [کمیت] وسطی^۳ بین ع ب [و] ح ص خارج می‌کنیم. و نسبت [قطر] ط^۴ به قطر ه را برابر نسبت ع ب به د قرار می‌دهیم. و بر ط دایره‌ای رسم می‌کنیم. همان مطلوب باشد. زیرا نسبت ج [به اضافه] ه به ه مثل نسبت ع ب به ح ص یعنی مربع نسبت ع ب به د است. و نسبت قطر ط به قطر ه برابر نسبت ع ب به د است. پس مربع نسبت قطر ط به قطر ه یعنی نسبت دایره ط به دایره ه برابر مربع نسبت ع ب به د، یعنی نسبت دو دایره ج و ه [و] ه به دایره ه است. پس دایره ط برابر دو دایره ج و ه است - و آنچه می‌خواستیم [شکل ۶].

۶. وقتی سه کمیت به طور پیوسته متناسب باشند، نسبت اولی به سومی هم‌چون مربع نسبت اولی به دومی است

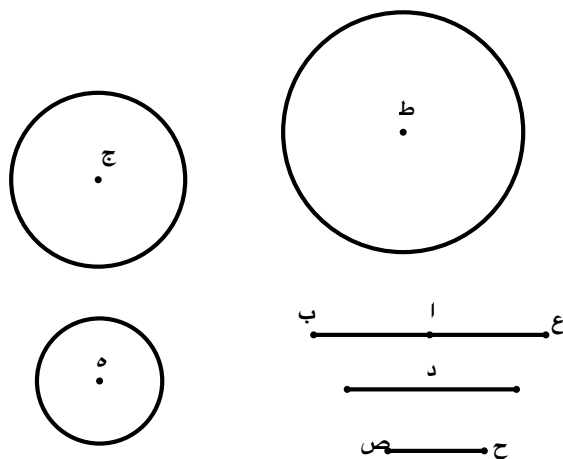
(اصول، ۷، تعریف ۹) یعنی برای سه مقدار a, b, c داریم: $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a}{c}$ یا $b^2 = ac$.

۱. اینجا هدف رسم دایره‌ای است که مساحتش با مساحت دو دایره مفروض برابر باشد.

۲. یعنی اب به اضافه ح ص

۳. نک: توضیح قضیه ۹، تناسب پیوسته

۴. ط نام دایره است.

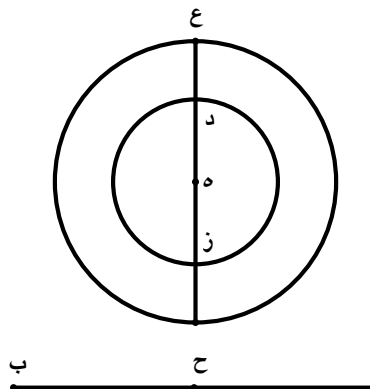


[شکل ۶]

قضیه ۱۲: می‌خواهیم دایره‌ای برابر سه دایره [متمايز] رسم کنیم. پس دایره‌ای را برابر دو تا از آن دایره‌ها رسم می‌کنیم. سپس دایره دیگری برابر این دایره رسم شده با دایره سوم باقی‌مانده رسم می‌کنیم - آنچه می‌خواستیم. قضیه ۱۳: می‌خواهیم به دایره مفروض دز مطوقی برابر خودش و هم صفحه با خودش بیفزاییم.^۱

پس مربع نسبت اب به دز را برابر دو به یک قرار می‌دهیم. و [اب] را برح نصف می‌کنیم. و بره مرکز [دایره] دز به بعد ح [دایره] ع را رسم می‌کنیم. پس چون مربع نسبت اب به دز یعنی مربع نسبت اح یا عه به هز یعنی نسبت [مساحت] دایره بزرگ به دایره کوچک برابر نسبت دو به یک است، پس [دایره] بزرگ دو برابر [دایره] کوچک است. پس مطوق برابر [دایره] کوچک است - و آنچه می‌خواستیم [شکل ۷].

1. $\pi(r^2 - r'^2) = \pi r'^2 \Rightarrow r = \sqrt{2}r' \Rightarrow \left(\frac{r}{r'}\right)^2 = \frac{2}{1}$



[شکل ۷]

قضیه ۱۴: می‌خواهیم بر دایره مفروضی مطوقی رسم کنیم که به آن محیط و با دایره مفروض دیگری مساوی باشد.

پس دایره‌ای مساوی دو دایره مفروض رسم می‌کنیم و بر مرکزی که می‌خواهیم بر آن دایره‌ای مساوی رسم شده رسم می‌کنیم. آنچه می‌خواستیم با کمی تأمل پدیدار می‌شود.

قضیه ۱۵: می‌خواهیم بر دایره مفروض مطوقی مساوی دو دایره مفروض رسم کنیم. پس دایره‌ای مساوی با دوایر سه‌گانه رسم می‌کنیم و بر مرکزی که می‌خواهیم بر آن دایره‌ای مساوی رسم شده رسم می‌کنیم. آنچه می‌خواستیم پدیدار می‌شود.

قضیه ۱۶: دو دایره مفروض است، می‌خواهیم از دایره بزرگ‌تر برابر ۱، سطح مطوقی مساوی دایره کوچک‌تر برابر ب جدا کنیم.

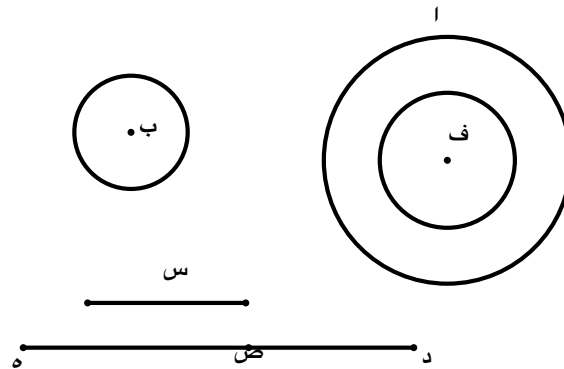
پس نسبت ده به س را برابر ۱ به ب قرار می‌دهیم. و دص را برابر س جدا می‌کنیم و بر مرکز ۱ دایره ف را رسم می‌کنیم. نسبتش [نسبت دایره ف] به ب مثل نسبت ص به س است. پس چون نسبت ف به ب برابر نسبت ص به س یعنی دص است پس به عکس نسبت، ۱ نسبت ب به ف برابر نسبت دص به ص است. و نسبت ۱ به ب برابر ده به س است. پس به نسبت مساوات [منتظم]، ۲ نسبت ۱ به ف رسم شده در آن مثل نسبت ده به ص است. و به تفصیل نسبت، نسبت سطح مطوق محیط به ف به برابر دص به ص یعنی ب به ف

۱. صول، ۷، تعریف ۱۳

۲. نسبت مساوات منتظم یا نسبت مساوات هموار (اصول، ۷، تعریف ۱۷):

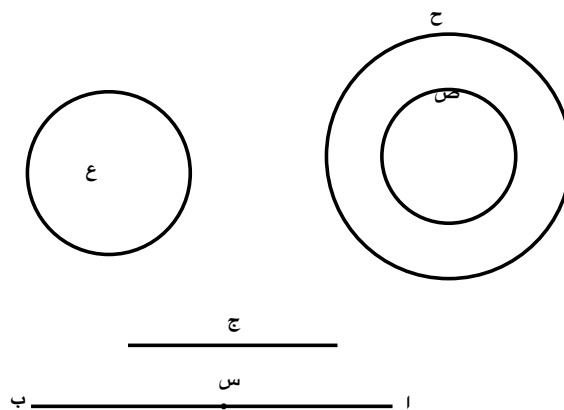
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{b}{e} = \frac{d}{f} \Rightarrow \frac{a}{e} = \frac{c}{f}$$

است. پس سطح مطوّق محیط به ف با ب مساوی می‌شود - و آنچه می‌خواستیم [شکل ۸].



[شکل ۸]

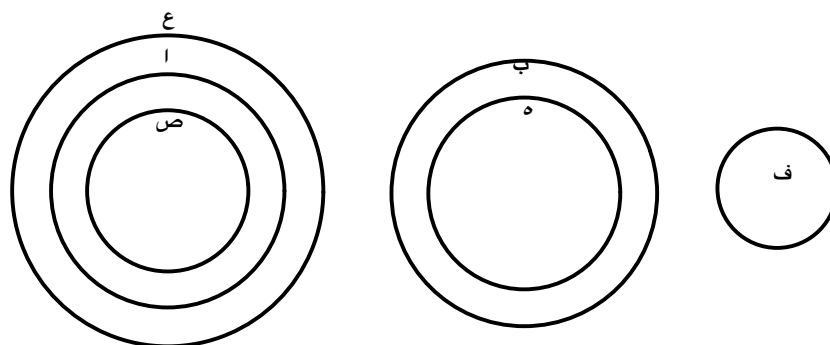
قضیه ۱۷: می‌خواهیم دایره‌ای مساوی سطح مطوّق ح ص رسم کنیم. پس نسبت اب به ج را برابر نسبت ح به ص قرار می‌دهیم و ب س را برابر ج جدا می‌کنیم و دایره ع را رسم می‌کنیم به طوری که نسبت دایره ع به ص برابر نسبت اس به ج باشد. پس چون اب به ج یعنی س ب برابر با ح به ص است، به تفضیل نسبت، نسبت [مساحت] مطوّق به ص برابر اس به ج، یعنی ع به ص است. پس ع برابر سطح مطوّق است - و آنچه می‌خواستیم [شکل ۹].



[شکل ۹]

قضیه ۱۸: می‌خواهیم دایره‌ای مساوی سطح دو مطوّق اص [و] به رسم کنیم.

پس مطوق ع را برابر مطوق ب به دایره ۱ می افزاییم. و دایره ف را مساوی مطوق ع ص رسم می کنیم. پس آن دایره مطلوب است. و برهانش پدیدار است. و آنچه می خواستیم رسم کنیم [شکل ۱۰].



[شکل ۱۰]

مقاله اول از کتاب احمد بن عمر کرابیسی در مساحت حلقه ها تمام شد. این مقاله شامل ۱۸ قضیه بود.^۱

مقاله دوم از کتاب مساحت حلقه ها

[مقدمه]: حلقه دایره ای ضخیم [چنبره]، شکل مجسمی است که سه دایره به آن محیطند، یکی به ضخامتش^۲ و دو دایره دیگر در صفحه ای که از داخل و خارج به دورش محیطند و به دو طرف قطر اولی^۳ مماسند. و حلقه مربعی ضخیم [چنبروار]، شکل مجسمی است که به ضخامتش مربعی محیط^۴ است و به دورش دو دایره که به دو طرف ضلع مربع یا دو طرف قطر مربع مماسند.

قضیه ۱: هر سطح مستقیمی که در دو خط مختلف ضرب شود آنگاه نسبت یکی از دو مجسم ایجاد شده از آن به مجسم دیگر برابر نسبت قاعده آن است که به سطح مفروض بر خط مستقیمی برخورد می کند، به قاعده ای که با آن در یک صفحه از مجسم دیگر

۱. تمت المقالة الاولى من كتاب احمد بن عيسى الكرابيسي في مساحة الحلق و هي ثمانية عشر شكلا والحمد لله رب العالمين [۱د+]

۲. یعنی دایره مولد حلقه

۳. دایره مولد

۴. یعنی مولد این حلقه یک مربع است.

است.^۱ این همان دعوی قضیه بیست و پنجم از مقاله یازده اصول فقط با عبارتی دیگر است. و برهانش دقیقاً همان برهان مذکور در آن قضیه است.

قضیه^۲: نسبت مجسم حادث از ضرب خط در سطح، به مجسم حادث از ضرب آن در قسمتی از سطح، برابر نسبت سطح است به قسمتی از آن مضروب در خط. و برهانش پدیدار است. چون در حقیقت بیانی از قضیه قبل است.

قضیه^۳: در هر حلقه مربعه الغلط مثل اب، ضرب نصف محیط‌های دو دایره‌اش یعنی ا [و] ب در [مساحت] مربع محیط به ضخامتش^۲ یعنی اج^۳ همان مساحت^۴ [جرم یا حجمش]^۵ است.^۶

وقتی اب را برک نصف کنیم و بره مرکز دو دایره، دایره ک را رسم کنیم، پس محیط ک در اب همان مساحت مطوق است.^۷ و جب عمود بر سطح مطوق اب است. پس جب [ضرب] در سطح مطوق اب همان مساحت [جرم] حلقه است. و اب ضرب در ب جب مربع اج^۸ است و [اب ضرب] در محیط ک سطح مطوق است. پس نسبت سطح مطوق به مربع اج برابر محیط ک به ب جب است. پس محیط ک در مربع اج برابر ب جب در سطح مطوق اب یعنی مساحت [جرم] حلقه است. پس محیط ک [ضرب] در [مساحت مربع] اج برابر مساحت [جرم] حلقه است. و محیط دو دایره ا [و] ب دو برابر محیط ک است. پس نصف محیط دو دایره ا و ب در [مساحت] مربع اج همان مساحت [جرم] حلقه است - و آنچه می خواستیم [شکل ۱۱].

۱. هر سطح مستقیمی که در دو خط مختلف ضرب شود دو متوازی السطوح پدید می آید. اگر جسم متوازی السطوحی با صفحه‌ای موازی با دو وجه روبه‌رو بریده شده باشد، نسبت قاعده به قاعده در دو جسم حاصل، چون نسبت جسم یکی به جسم دیگری است (اصول، XI، قضیه ۲۵).

۲. یعنی مربع مولد

۳. یعنی مربعی که ا و ج دو رأس مقابل آن است.

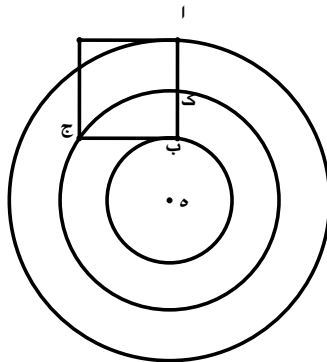
۴. در این قضیه منظور از مساحت حلقه، مساحت جرم حلقه یا حجم آن است.

۵. از دو قضیه قبلی و محتوای قضیه اخیر نتیجه می شود که بحث بر سر جسم و حجم است.

۶. حجم حلقه مربعه الغلط برابر است با محیط دایره میانی در مساحت مربع مولد ($r r'$ شعاع دایره‌های درونی و بیرونی حلقه و a ضلع مربع مولد): $S = (\pi r + \pi r') a^2$

۷. قضیه ۴ رساله اول

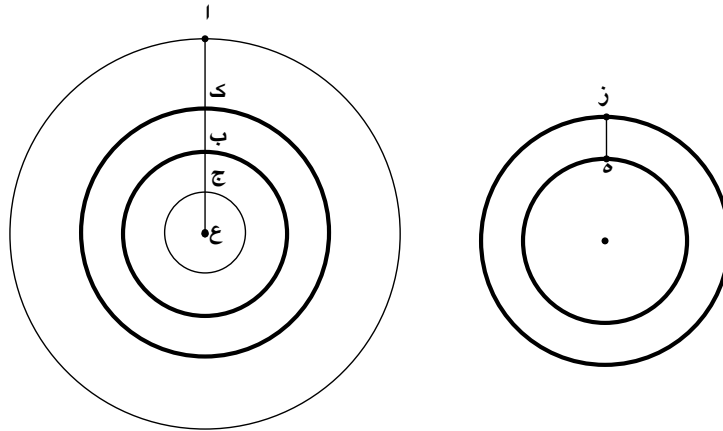
۸. «مربع اج» یعنی مربعی که دو رأس مقابل آن ا و ج باشد و منظور توان دوم اج نیست.



قضیه ۴: بزرگ‌ترین سطحِ مَطَوَّقی که دور حلقهٔ مستدیرة الغلط را قطع می‌کند برابر $\frac{1}{2}$ است، که همان سطحِ مَطَوَّقِ محیط به دو دایرهٔ حلقه یعنی [دوایر] $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{2}$ است. و به قطر دایرهٔ محیط به ضخامت آن $\frac{1}{2}$ مماس است و آن همان سطح $\frac{1}{2}$ است.

چون در غیر این صورت سطحی کوچک‌تر $\frac{1}{2}$ از $\frac{1}{2}$ برابر $\frac{1}{2}$ را قطع می‌کند. همان‌طور که پیش‌تر در مقدمهٔ رساله گفتیم معلوم است که اگر قطر $\frac{1}{2}$ از قطر $\frac{1}{2}$ کوچک‌تر باشد، آنگاه دایرهٔ $\frac{1}{2}$ بزرگ‌تر از دایرهٔ $\frac{1}{2}$ (برابر $\frac{1}{2}$) و دایرهٔ $\frac{1}{2}$ کوچک‌تر از دایرهٔ $\frac{1}{2}$ (برابر $\frac{1}{2}$) است. $\frac{1}{2}$ و مرکز هر دو [دایرهٔ $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{2}$] همان $\frac{1}{2}$ مرکز $\frac{1}{2}$ است. پس $\frac{1}{2}$ برابر $\frac{1}{2}$ می‌شود. پس سطح $\frac{1}{2}$ که جزیی از سطح $\frac{1}{2}$ و برابر سطح $\frac{1}{2}$ است، بزرگ‌تر از کل سطح $\frac{1}{2}$ می‌شود. این خلف است. پس حلقهٔ $\frac{1}{2}$ سطحی بزرگ‌تر از [مَطَوَّق] $\frac{1}{2}$ را قطع نمی‌کند - و آنچه می‌خواستیم [شکل ۱۲].

۳. یعنی دایه‌ها را بر آب و دایه‌ها را بر آب که در نظر می‌گیریم (در شکل) دوایر سمت چپ را ببینید).



[شکل ۱۲]

قضیه^۵: در هر حلقه مستدیره الغلط^۱ مثل ا-ج، ضرب نصف محیط دو دایره آن یعنی ا و ج در [مساحت] دایره محیط به ضخامت آن^۲ که همان دایره ا-ج است، همان مساحت [جرم یا حجمش] است.^۳

وقتی بر دایره ا-ج، مربع ک-ع^۴ را محیط می‌کنیم و ا-ج را در [نقطه] ب نصف می‌کنیم و به مرکز حلقه و به شعاع ه ب دایره ب را رسم می‌کنیم و نیم دایره زو و نصف مربع که همان زی است را رسم می‌کنیم، آنگاه مطوق ا-ج، حلقه مستدیره الغلط و حلقه مربعه الغلطی که از داخل و خارج دو دایره ا [و] ج به آن و به ضخامتش یعنی مربع ک-ع محیط است را نصف می‌کند. پس مجسمی که قاعده‌اش او باشد و نصف دایره ا-ج به ضخامتش محیط باشد، نصف حلقه مستدیر الغلط ا-ج^۵ است. و مجسمی که قاعده‌اش او است و نصف مربع ک-ع به ضخامتش محیط باشد، نصف حلقه مربعه الغلط^۶ است. پس، از ضرب او در دو سطح مختلف، دو مجسم تشکیل می‌شود، یکی مجسمی که ضخامتش محیط به سطح زی^۷

۱. چنبره

۲. دایره مولد

۳. طبق قضیه^۲ پاپوس، حجم چنبره برابر است با $A = (\pi r^2)(2\pi R)$ ، پس طبق قضیه^۵ رساله اول مساحت الخلق، دستور کرایسی برای حجم چنبره چنین است:

$$S = \frac{1}{2}(P + P')\pi r^2 \text{ که در آن } \frac{1}{2}(P + P') = 2\pi R$$

۴. مربعی که ک و ع دو رأس مقابل آن است.

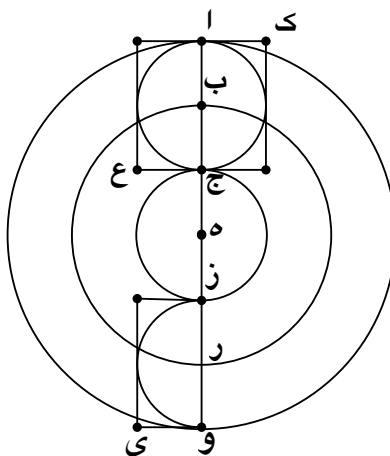
۵. یعنی چنبره‌ای که از وسط دو قسمت شده و سطح مقطع آن مطوق ا-ج است (مولد دایره).

۶. یعنی چنبره‌ای که از وسط دو قسمت شده و سطح مقطع آن مطوق ا-ج است (مولد مربع).

۷. زی مستطیلی است که دو رأس مقابلش زی و ی است.

است و دیگری مجسمی که ضخامتش محیط به سطح نیم‌دایره زو است. پس نسبت اولی به دومی برابر نسبت [مستطیل] زی به نیم‌دایره زو است. و چون نسبت جزء به جزئی که نام بردیم برابر نسبت چند برابر به چند برابر است، نسبت [حلقه] مربعه الغلط به [حلقه] مستدیره الغلط برابر نسبت [مجسم] محیط به او و زی، به [مجسم] محیط به او و نیم‌دایره زو است، و این برابر نسبت زی به نیم‌دایره زو و برابر نسبت مربع کع به دایره اج است. پس نسبت دو حلقه برابر نسبت مربع کع به دایره اج است. و محیط ب در [مساحت] کع همان مساحت [جرم]^۱ [حلقه] مربعه الغلط است. پس نسبت [حلقه] مربعه الغلط به مجسمی که از ضرب ب در دایره اج تشکیل می‌شود برابر نسبت مربع کع به دایره اج یعنی نسبت مربع به مدور است، پس نسبت مربع به مدور برابر نسبت آن^۲ به مجسمی است که از ب در دایره اج تشکیل می‌شود. پس ضرب محیط ب که آن نصف محیط دو دایره ا و ج است در دایره اج همان مساحت [جرم] حلقه مستدیره الغلط است - و آنچه می‌خواستیم [شکل ۱۳].

و یافت شده است که نصف محیط دو دایره محیط به حلقه مستدیره الغلط همان عمود مستدیر در دور جسمش است.^۳



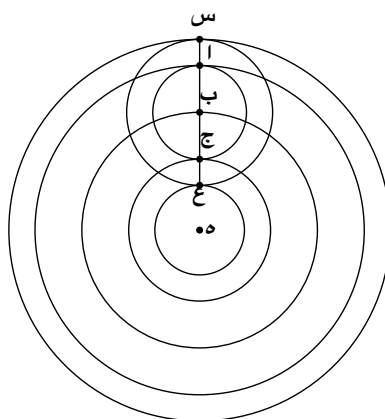
[شکل ۱۳]

۱. مساحت جرم = حجم

۲. مجسم یا حلقه مربعه الغلط

۳. یعنی اگر حلقه را از مقطع دایره مولدش ببریم و باز کنیم، به یک استوانه با قاعده دایره مولد و ارتفاع نصف محیط دو دایره درونی و بیرونی تبدیل می‌شود.

قضیه ۶: می‌خواهیم به ضخامت حلقه مفروض اج زیادتى مساوى آن بیفزاییم. پس قطر اج محیط به آن را بر ب نصف می‌کنیم و بر آن دایره [س ع] را مساوی با دو برابر دایره اج در همان صفحه رسم می‌کنیم. و باید محیط دایره س ع از نصف محیط‌های دو دایره ۱ و ج کوچک‌تر باشد. و به مرکز ه، مرکز دو دایره [۱ و ج]، دو دایره رسم می‌کنیم که بر دایره س ع مماس باشند. این ما را به مطلوب می‌رساند. چون س ع دو برابر اج است، پس ضرب محیط ب در [مساحت] دایره س ع همان مساحت [جرم] حلقه محیط به دایره س ع است و برابر ضرب آن^۱ در دو برابر دایره اج است. پس در ضخامت^۲ حلقه اج زیادتى برابر آن^۳ افزوده‌ایم. و به این تدبیر ممکن است که بر حلقه مفروض زیادتى برابر هر نسبتى که می‌خواهیم بیفزاییم [شکل ۱۴].



[شکل ۱۴]

قضیه ۷: می‌خواهیم از ضخامت حلقه مفروض، نقصانى مساوى نصف آن بکاهیم.^۴ و برهانش عکس برهان قضیه قبل است، برای این کار از حلقه محیط به ضخامت آن مطوقى مساوى با نصف محیط جدا می‌کنیم و سه دایره دیگر رسم می‌کنیم. و آنچه می‌خواهیم را بر عکس روش قضیه قبل بیان می‌کنیم - آنچه می‌خواستیم. مقاله دوم پایان یافت.

۱. محیط ب

۲. دایره مولد

۳. دایره مولد

۴. یعنی می‌خواهیم مساحت دایره مولد حلقه مفروضی را نصف کنیم.

منابع

- ابن ندیم. (۱۳۸۱ ش). الفهرست. (م. رضا تجدد، مترجم). تهران: اساطیر.
- البغدادی، اسماعیل پاشا. (۱۹۵۱ م). هدیة العارفین أسماء المؤلفین و آثار المصنفین (جلد ۱، چاپ سوم). استانبول.
- ابن هیثم. (بدون تاریخ). شرح مشکل صدور مقالات کتاب اقلیدس (نسخه خطی). کتابخانه ملی رشت، C81.
- ابن هیثم، محمد بن حسن. عزب احمد؛ فؤاد احمد. (۱۴۲۶ ق). شرح مصادر کتاب اقلیدس. قاهره - مصر: دارالکتب والوثائق القومية. الإدارة المركزية للمراكز العلمية. مرکز تحقیق التراث.
- ایوز، هاوارد دبلیو. (۱۳۶۹ ش). آشنایی با تاریخ ریاضیات (جلد اول، محمد قاسم وحیدی اصل، مترجم، چاپ سوم). تهران: مرکز نشر دانشگاهی.
- حاجی خلیفه. (۲۰۱۲ م). کشف الظنون عن اسامی الکتب والفنون (مجلد ۱ و ۶، طبعه الاولی). مؤسسه الفرقان.
- قربانی، ابوالقاسم. (۱۳۷۵ ش). زندگی نامه ریاضی دانان دوره اسلامی (چاپ دوم). تهران: قفطی. (۱۹۰۸ م). تاریخ الحکما. لیبزیگ.
- کحالة، عمر رضا. (۱۹۹۳ م). معجم المؤلفین (الجزء الثانی). مؤسسه الرساله.
- کرابیسی. (بدون تاریخ). شرح مشکل صدور مقالات کتاب اقلیدس (نسخه خطی). کتابخانه ملی رشت، C81.
- کرابیسی. (بدون تاریخ). مساحة الخلق (نسخه خطی). آکسفورد (I91/2a)؛ دانشگاه تهران ۱۷۹۰/۲، ۲۴۳۲/۱۴، ج ۱۱/۱۵۰۲، ایاصوفیه ۲۷۶۰.
- دایرة المعارف مؤلفان اسلامی. (بدون تاریخ). مقاله «احمد کرابیسی» (ج ۲، ص ۱۱۷). پژوهشگاه فرهنگ و معارف اسلامی.
- همای، جلال الدین. (۱۳۴۶). خیامی نامه (جلد ۱، سلسله انتشارات انجمن آثار ملی). تهران: هیث. (۲۰۰۰). اصول اقلیدس (محمد هادی شفیع‌ها، مترجم). تهران: مرکز نشر دانشگاهی.
- Arabic Catalogue Khudabaksh Library, Vol. 22, pp. 25-27. Retrieved from <https://kblibrary.bih.nic.in/>
- Bessel-Hagen, E., & Spies, O. (1931). Das Buch über Ausmessung der Kerisringe des Aḥmad ibn 'Omar al-Karābīsī. *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik, Band I*, 502-540. Berlin.
- Brentjes, S. (2000). Aḥmad Al-Karābīsī's commentary on Euclid's Elements. In M. Folkerts & R. Lorch (Eds.), *Sic itur ad astra: Studien zur Geschichte der Mathematik und Naturwissenschaften - Festschrift für den Arabisten Paul Kunitzsch zum 70. Geburtstag* (pp. 31-75). Harrassowitz.

- Brockelmann, C. (1997). Al-Karābīsī. In *Encyclopaedia of Islam* (2nd ed., Vol. 4, p. 596). Leiden: E.J. Brill.
- Heath, T. L. (1921). *A history of Greek mathematics II*. Oxford.
- Rosenfeld, B., & Ihsanoglu, E. (2003). *Mathematicians, astronomers, and other Islamic scholars ...* (7th-19th c.). Istanbul.
- Sezgin, F. (1974). *Geschichte des arabischen Schrifttums, Band V*. Leiden, E. J. Brill.
- The Arabic version of Euclid's *On Division*. In M. Folkerts & J. P. Hogendijk (Eds.), *Vestigia Mathematica: Studies in medieval and early modern mathematics in honour of H.L.L. Busard* (pp. 143-162). Amsterdam: Rodopi.
- Von Solomon Gandz. (1933). Bemerkungen zum, Buch über die Ausmessung der Ringe des Aḥmad ibn ‘Omar al-Karābīsī. *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik, Band 2*, 98-105. Berlin.

پیوست: تصحیح رساله مساحه الحلق کرایسی

بسم الله الرحمن الرحيم^۱

المقالة الأولى من كتاب أحمد بن عمر الكرایسی^۲ في مساحة الحلق^۳

[صدر]: فضل إحدى الدائرتين المتوازيتين في سطح على الأخرى أمتى سطحًا مطوّقًا و فضل نصف قطر العظمى على نصف قطر الصغرى قطره.^۴

[۱] كل أربعة مقادير كانت نسبة الأول في الثالث كما في ج و هـ إلى الثاني في الرابع ك ب في د و هو و كنسبة الأول إلى الثاني مُثناة أي ا إلى ب. فإن الأول إلى الثاني كالثالث إلى الرابع.

فليكن مربعاً ا، ب؛ ز، ح^۵ فز إلى ح، كما إلى ب^۶ مُثناة التي هي ك^۷ هـ إلى و. فبالإبدال هـ إلى ز کو إلى ح. ولأن ا ضرب في نفسه و في ج فكان ز، هـ^۸. ف^۹ هـ إلى ز كج إلى ا. فو إلى ح كج إلى ا^{۱۰}. و ب ضرب في نفسه و في د فكان ح، و. فو إلى ح أعني ج إلى اكد إلى ب. فبالإبدال ج إلى د، كما إلى ب - وهو المراد [شكل ۱].

[۲] كل دائرتين كاج، بد فإن نسبة محيط أحدهما إلى محيط الأخرى^{۱۱} كج إلى د كنسبة قطرها إلى قطرها كما إلى ب.

لأن نصف ا في نصف ج هو تكسير اج، فا في ج هو أربعة أمثال اج. وكذا ب في د أربعة أمثال بد. و اج إلى بد، كما إلى ب مُثناة. و نسبة الأجزاء إلى الأجزاء السمية لها كنسبة الأضعاف، فأربعة

۱. به العون یا کریم] + آ؛ بسم الله الرحمن الرحيم] - ج، - ت، - د ۲د

۲. رحمه الله + ۲د

۳. برای پرهیز از تکرار، شکلها فقط در ترجمه رساله آمده است.

۴. قطره] - ج

۵. در نسخه ۱د و ۲د هر بند با حروف ابجد مشخص شده است.

۶. یعنی مربع ا برابر ز و مربع ب برابر ح باشد؛ ا، ب؛ ز، ح] ابدح: آ

۷. ک ا [ب] - آ

۸. نسبة] + ج

۹. ک ا [ب] - آ

۱۰. ف] ک: آ

۱۱. فو [ب] ح ک ج [ب] - ا، ۱د، - ج

۱۲. الاخرى] آخر: ج

أضعاف اجـ إلى أربعة أضعاف بدكا إلى ب مُثناة. فا، ب، جـ، د^١ أربعة مقادير نسبة مسطح^٢ الأول في الثالث إلى مسطح الثاني في الرابع كالأول إلى الثاني مُثناة. فقطر ا إلى قطر ب كمحيط جـ إلى محيط د - وهو المراد [شكل ٢].

[٣] فضل محيط أعظم المتوازيين في بسيط مستو كاحب على محيط الأصغر كجزه مساو لضعف محيط الدائرة الواقعة في البسيط المطوق بينها كادج .

لأن ادج إلى جزه^٣ كاج إلى جه، فضعف اج إلى جه^٤ كضعف ص/١٣٧ / ادج إلى جزه^٥. فبالتركيب اب إلى جه أعني اب ح إلى جزه^٦ كضعف اجد مع جهز إلى جهز^٧. فضعف اجد مع جهز يساوي اب ح. فزيادة اب ح على جهز لضعف^٨ محيط اجد - وهو المطلوب [شكل ٣].

[٤] ضرب قطر المطوق كس ص في نصف محيطي^٩ دائرتيه كس اب، ص دج تكسیره.

لأن نصف س با يزيد^{١٠} على نصف ص جد بس ص ز. وضرب نصف ص دج في ص ه هو تكسير ص جه. وضرب نصف س اب^{١١} في ص ه يزيد على تكسیرها [ص دج] بضرب س ز ص^{١٢} في ص ه. ونسبة نصفی س اب،^{١٣} ص دج كنسبة س ه،^{١٤} ص ه. فبالتفضیل س ص ز إلى ص جد كس ص إلى ص ه. فس ص ز في ص ه كنصف ص جد في س ص. وقد زاد ضرب نصف س اب في ص ه على ص دج بس ز ص^{١٥} في ص ه. فنصف س اب في ص ه يزيد على ص دج بس ص في نصف ص دج . وس ه في نصف س اب مساو لتكسیر س با. فنصف س با في س ص ينقص عن مطوق س ص

١. در تصحيح بسل هاگن اینجا نوشته شده است: اب، جد

٢. مسطح [سطح: آ

٣. جزه [جده: آ

٤. اج [إلي جه] - ج

٥. جزه [جده: آ

٦. جزه [جده: د

٧. جهز [ج - ج

٨. لضعف [بضعف: آ، د، فضعف: ج

٩. محيطی [محيط: ت

١٠. يزيد [نزيد: د

١١. س اب [ص اب: آ

١٢. س ز ص [س دص: آ

١٣. س اب [ص اب: آ

١٤. س ه [س صه: آ

١٥. س ز ص [س ص ز: د

بضرب نصف ص د ج في س ص. ف ضرب نصف محيطي س اب و ص د ج في س ص قطر المَطْوَق يساوي تكسيه - وهو المراد^١ [شكل ٤].

[٥] محيط الدائرة المرسومة في منتصف السطح المَطْوَق كاج مساو لنصف محيطي دائرتيه. لأن ادى^٢ إلى ج ط ز كاي^٣ إلى جز ونسبة الجزء^٤ إلى الجزء^٥ كنسبة الأضعاف إلى الأضعاف^٦ السميّه فاي^٧ إلى جز كاه إلى جه. وبالتركيب ادى^٨ جز ط^٩ إلى ج ط ز كاز إلى جه. فنصف ادى^{١٠} ج ط ز إلى ج ط ز كب ه^{١١} إلى جه أعني بوح^{١٢} إلى ج ط ز. فمحيط بوح المرسومة^{١٣} على ب منتصف^{١٤} مَطْوَق اج يساوي نصف^{١٥} محيط دائرتيه - و ذلك ما أردناه [شكل ٥].

[٦] نريد أن نعمل دائرة يكون نسبة محيطها إلى محيط دائرة المفروضة^{١٦} كنسبة مفروضة. فنجعل نسبته خط ما إلى قطر الدائرة المفروضة كالنسبة المفروضة. ونرسم عليه دائرة فلكون المحيطين على نسبته القطرين أعني المفروضة - يظهر المطلوب.

[٧] نريد أن نعمل دائرتين تكون نسبة محيطها إلى محيط دائرة مفروضة كنسبة مفروضة. فنقسم مقدم النسبة بقسمين كيف^{١٧} اتفق و نجعل نسبة خطين إلى قطر الدائرة المفروضة كنسبة قسيمي مقدم النسبة إلى مؤخرها. ونرسم^{١٨} على الخطين دائرتين فيظهر المطلوب من شكل كد من مقالة ه^{١٩} من

١. المراد [مطلوب: آ، ت

٢. ادى [ادب: ج

٣. ي [ب: ج

٤. الجزء [الجز: ت

٥. الجزء [الجز: ت

٦. إلى الأضعاف [+ ج

٧. ي [ب: ج

٨. ي [ب: ج

٩. جز ط [ج ط ز: د

١٠. ادى [اي: ب: ج

١١. كنسبة ح [ه، د، ج

١٢. بوح [ب زح: آ

١٣. المرسومة [الموسومة: آ، ج

١٤. منتصف [منتصف: ج

١٥. نصف [نصف: آ، ت

١٦. المفروضة [مفروضة: آ

١٧. ما [+ ج

١٨. نرسم [يرسم: ج

١٩. قضيه ٢٤ از مقالة ٥ اصول اقليدس

الأصول. و بهذا التدبير يمكن أن نعمل ثلاثة دوائر أو أكثر يكون نسبة مجموع محيطاتها إلى محيط دائرة مفروضة كنسبة مفروضة - وهو المراد.

[٨] نريد أن نعمل دائرتين تكون نسبة محيطها إلى محيطي دائرتين مفروضتين كنسبة مفروضة. فنعمل دائرتين تكون نسبة إحديهما إلى إحدي المفروضتين النسبة المفروضة. وكذا نسبة الآخرين فتكون نسبة المعمولتين إلى المفروضتين كإحديهما إلى نظيرها^١ أعني النسبة المفروضة - و ذلك ما أردناه. [٩] نريد أن نجد خطين يكون نسبتها كنسبة دائرتين مفروضتين. فنجد لقطريهما ثالثاً في^٢ النسبة فنسبة الأول إلى الثالث كنسبة مربع الأول إلى الثاني وهما القطران التي هي كنسبة الدائرتين. فالثالث و^٣ أحد القطرين^٤ هما الخطان المطلوبان. /ص ١٣٨/ [١٠] نريد أن نعمل دائرة تكون نسبتها إلى دائرة مفروضة كنسبة مفروضة.

فنخرج وسطاً في النسبة بين حدي النسبة المفروضة ونجعل نسبة خط ما إلى قطر المفروضة كالأول من حدي النسبة إلى الوسط ونرسم^٥ على الخط دائرة فتكون هي المطلوبة وبرهانه ظاهر. [١١] نريد أن نعمل دائرة مساوية لدائرتي ج، هـ المفروضتين.

فنجد اب، ح ص على نسبتها. فبالتركيب ج هـ^٦ إلى هـ كا ب، ح ص. وليكن ب ع مثلها^٧ إلى ح ص ويخرج د وسطاً بين ع ب، ح ص. ونجعل^٨ [قطر] ط^٩ إلى قطر هـ كع ب^{١٠} إلى د. ونرسم على ط دائرة. فهي المطلوبة. لأن ج [و] هـ إلى هـ كع ب إلى ح ص أعني ع ب^{١١} إلى د مُثناة وقطر ط إلى قطر هـ كع ب^{١٢} إلى د. فقطر ط إلى قطر هـ مُثناة أعني دائرة ط إلى دائرة هـ كع ب إلى د مُثناة أعني دائرتي ج [و] هـ إلى دائرة هـ. فدائرة ط كدائرتي ج، هـ - و ذلك ما أردناه أن نبين^{١٣} [شكل ٦]. [١٢] نريد أن نعمل دائرة^{١٤} كثلاث دوائر.

١. نظيرها [نظيره: د، ج، ت؛ قطره: أ]

٢. ثالثاً في [الثاني: ج]

٣. و- أ

٤. بل + د

٥. نرسم [يرسم: ج]

٦. ج هـ [ج: د]

٧. مثلها [مثلها: أ]

٨. نجعل [يجعل: ج]

٩. ط [ط: د، أ، ج]

١٠. ع ب [ع ف: أ]

١١. ع ب [ع ف: أ]

١٢. ع ب [ع ف: أ]

١٣. أن نبين [أ، - ت]

١٤. دائرة [ت - ت]

فنعمل^١ دائرة كائنين منها، فدائرة^٢ أخرى كهذه المعمولة مع الباقية^٣ من الثلاث. فيكون هي المطلوبة. وبرهانه ظاهر.^٤

[١٣] نريد أن نضيف إلى دائرة دز^٥ المفروضة مطوقًا مثلها^٦ وفي سطحها.

فنجعل اب إلى دز مُثناة كالاثنين إلى الواحد^٧ وننصفه على ح ونرسم على ه مركز دز بُعَد ح ا دائرة ع. فلأن اب إلى دز مُثناة أعني اح بل ع ه إلى هز مُثناة أعني نسبة الدائرة العظمى إلى الدائرة الصغرى كنسبة الإثنين إلى الواحد. فالعظمى ضعف الصغرى فالمطوق مثل الصغرى - وذلك ما أردناه [شكل ٧].

[١٤] نريد أن نعمل على دائرة مفروضة مطوقًا يحيط بها مساويًا لدائرة أخرى مفروضة.

فنعمل دائرة مساوية للمفروضتين. وعلى مركز التي نريد أن نرسم عليها دائرة مساوية للمعمولة - فيظهر المطلوب بأدنى تأمل.

[١٥] نريد أن نعمل على دائرة مفروضة مطوقًا مساويًا لدائرتين^٨ مفروضتين.

فنعمل دائرة مساوية للدوائر الثلاث^٩. وعلى مركز التي نريد أن نعمل عليها دائرة مساوية للمعمولة - فيظهر المطلوب.

[١٦] نريد أن نفصل من أعظم دائرتين مفروضتين كما سطحًا مطوقًا مساويًا لأصغرها ك ب.

فنجعل ده إلى س كما إلى ب ونفصل دص كس. ونعمل على مركز ا دائرة ف. تكون^{١٠} نسبتها إلى ب كص ه إلى س. فلأن ف إلى ب كص ه إلى س^{١١} أعني دص. فبالعكس ب إلى ف كدص إلى ص ه. وكان ا إلى ب كده إلى س. فبالمساواة [المنتظم] ا إلى ف المعمولة فيها كده إلى ه ص. وبالتفضيل نسبة السطح المطوق المحيط بف إلى ف كدص إلى ص ه أعني ب إلى ف. فالسطح المطوق المحيط بف يساوي^{١٢} ب - وهو المراد [شكل ٨].

[١٧] نريد أن نعمل دائرة مساوية لسطح ح ص المطوق.

١. فنعمل [في عمل: ج

٢. فدائرة] ودائرة: د، ١٥، ٢٥

٣. الباقية] ثالثة: د

٤. وبرهانه ظاهر] - آ، - ت

٥. دز] ه دز: ج

٦. مثلها] بمثلها: آ

٧. الواحد] الواحد: آ

٨. لدائر] د

٩. الثلاث] التي: د، ج

١٠. تكون] يكون: آ، د

١١. س] ص: آ

١٢. يساوي] تساوي: د

فنجعل اب إلى ج كح إلى ص. ونفصل بس كج. ونعمل دائرة ع نسبتها إلى ص كاس إلى ج. فلأن اب إلى ج أعني س ب كح إلى ص. فبالفضيل نسبة المطوق إلى ص كاس / ص ١٣٩ / إلى ج. أعني ع إلى ص. فع كالمطوق - وهو المطلوب [شكل ٩].

[١٨] نريد أن نعمل دائرة مساوية لسطحي اص، ب ه المطوقين.

فنضيف^١ مطوق عا إلى دائرة ا مساوياً لمطوق ب ه. ونعمل دائرة ف مساوية لمطوق ع ص. فهي المطلوبة. وبرهانه ظاهر - وذلك ما أردنا أن نعمل [شكل ١٠].

تمت المقالة الاولى^٢.

المقالة الثانية من كتاب مساحة الحلق

[صدر]: الحلقة المستديرة الغلط هي شكل مجسم يحيط به ثلاثة^٣ دوائر، إحديها بغلظها والأخرى^٤ في بسيط واحد يحيطان باستدارتها من داخل وخارج ويماسان^٥ طرفي قطري الاولى^٦ والمربعة الغلط هي التي^٧ يحيط بغلظها مربع وباستدارتها دائرتان تماسان طرفي ضلع المربع أو طرفي قطره.

[١] كل سطح مستقيم يضرب في خطين مختلفين فإن نسبة أحد الجسمين الحادثين^٨ عنه إلى الآخر كنسبة قاعدته التي تلقى^٩ السطح المفروض على خط مستقيم^{١٠} إلى قاعدة^{١١} التي معها في بسيط واحد من الجسم الآخر. هذا دعوى الشكل الخامس والعشرين من المقالة الحادية عشر من الاصول إلا إنها بعبارة أخرى. وبرهانه هو البرهان المذكور في ذلك الشكل^{١٢} بعينه.

[٢] نسبة الجسم الحادث عن ضرب خط ما في سطح إلى الحادث عن ضربه في بعضه كنسبة السطح إلى بعضه المضروب في الخط. وبرهانه ظاهر إذ هو في الحقيقة استنباطة للشكل^{١٣} المتقدم.

١. فنضيف[فنضف: آ؛ يضيف: د٢

٢. من كتاب احمد بن عيسى الكرابيسي في مساحة الحلق وهي ثمانية عشر شكلاً والحمد لله رب العالمين [د+، ج؛ من كتاب احمد بن عمر الكرابيسي والحمد لله] + ت؛ وهي ثمانية عشر شكلاً والحمد لله رب العالمين [د+ ٢د

٣. ثلاثة[ثلث: د١، ج؛ ثلاث: ت، د٢

٤. والأخرى[والآخرين: د٢

٥. تماسان[يماسان: د٢

٦. الاولى[الاول: د٢

٧. التي- ت

٨. الحادثين[الحادثتين: ج

٩. تلقى[يلقي: آ، د٢

١٠. مستقيم[المستقيم: د٢

١١. قاعدة[القاعدة: د٢

١٢. في ذلك الشكل- آ

١٣. للشكل[الشكل: د١

[۳] كل حلقة مربعة الغلط كاب ف ضرب نصف محيطي دائريته^١ كا، ب في المربع المحيط بغلظها كا ج هو تكسيرها.

إذ نصف^٢ اب على ك ونرسم على ه مركز الدائرتين دائرة ك، فمحيط ك في اب هو تكسير المطوق. و جب عمود على سطح اب المطوق. فجب في سطح اب المطوق هو تكسير الحلقة. و اب ضرب في ب ج فكان مربع اج وفي محيط ك فكان سطح المطوق. فسطح المطوق^٣ إلى مربع اج كمحيط ك إلى ب ج. فمحيط ك في مربع اج كب ج في سطح مطوق اب أعني تكسير الحلقة. فمحيط ك في اج هو تكسير الحلقة ومحيطا ا، ب ضعف محيط ك. فنصف محيطا ا، ب في مربع اج هو تكسير الحلقة - و هو المراد [شكل ١١].^٤

[٤] أعظم السطوح المطوقة التي تقع الحلقة المستديرة الغلط على استدارتها كاج هو السطح المطوق المحيط به دائرتا الحلقة وهما ا، ج و يماسان^٥ قطر الدائرة المحيطة بغلظها وهو سطح اج. وإلا فليقطعها سطح أعظم من اج كهز فلما قدّمنا في الصدر يظهر أنّ قطر هز أصغر من قطر اج، فدائرة ه أعظم من دائرة ج، فليكن كب و ز أصغر من ا فليكن كك^٦ و هما على ع مركز اج فب ك كهز. فسطح بك البعض لكونه كسطح هز / ص ١٤٠ / أعظم من سطح اج الكل. هذا خلف^٧. فلا يقطع حلقة اج سطح أعظم من اج - وهو المطلوب^٨.

[٥] كل حلقة مستديرة الغلط كاج ف ضرب نصف^٩ محيطي دائريته كاج في^{١٠} الدائرة المحيطة بغلظها وهي دائرة اج هو تكسيرها.

إذ نعمل على دائرة اج المحيطة مربع كع ونصف اج على ب^{١١} ونرسم على مركز^{١٢} الحلقة ببعد ه ب دائرة ب و نصف دائرة زو ونصف مربع وهو^{١٣} زي فطوق اج نصف حلقة^{١٤} المستديرة الغلط والمربعة

١. دائريته [دائريته: د٢]

٢. نصف [ينصف: د٢]

٣. فسطح المطوق [د١، ج - ج]

٤. وهو المراد [ج - ج]

٥. تماسان [يماسان: د٢، ت]

٦. ك [ط: أ]

٧. هذا خلف [هف: ج]

٨. وهو المطلوب وهو المط: د٢

٩. نصف [ج - ج]

١٠. محيط [أ + ج]

١١. ب [أ: د١]

١٢. مركز [ت - ت]

١٣. وهو [ج، د - د٢]

١٤. حلقة [الحلقة: ت]

الغلظ التي^١ يحيط بها من داخل و خارج دائرتا^١، ج و بغلظها مربع^٢ كع. فالمجسم التي^٣ قاعدته^٤ او^٥ نصف دائرة اجـ يحيط بغلظه هو نصف حلقة اجـ المستديرة الغلظ. والتي^٦ قاعدة او^٧ يحيط بغلظه نصف مربع كع هو نصف الحلقة المربعة الغلظ. فاو ضرب في سطحين مختلفين فكان منه المجسمان^٨ المحيط بغلظ أحدهما زي^٩. و بالآخر نصف دائرة زد^{١٠}. فنسبة الأول إلى الثاني كنسبة زي^{١١} إلى نصف دائرة زو. ولأن نسبة الجزء إلى الجزء السقى له كنسبة الأضعاف إلى الأضعاف تكون^{١٢} نسبة المربعة الغلظ إلى مستديرتة كنسبة المجسم المحيط به او و زي إلى محيط به او^{١٣} و نصف دائرة زو. وهي كنسبة زي إلى نصف دائرة زو و^{١٤} كنسبة مربع كع إلى دائرة اجـ. فنسبة الحلقتين كنسبة مربع كع إلى دائرة اجـ ومحيط ب في كع هو تكسير المربعة الغلظ. فنسبة المربعة إلى المجسم الذي من ضرب ب في دائرة اجـ كنسبة مربع كع إلى دائرة اجـ أعني نسبة المربعة إلى المدورة. فنسبة المربعة إلى المدورة^{١٥} كنسبتها إلى المجسم الذي يكون من ب في دائرة اجـ. فـضرب محيط ب وهو نصف محيطي^{١٦} ا [و] ج في دائرة اجـ هو تكسير الحلقة المستديرة^{١٧} الغلظ - وذلك ما أردناه.

و هنالك استبان إن نصفي محيطي الدائرتين المحيطتين بالحلقة المستديرة الغلظ هو عمود مستدير في استدارة جسمها.

[٦] نريد أن نزيد في غلظ حلقة اجـ المفروضة زيادة مساوية لها.

١. التي [الذي: آ]
٢. مربع [ربع: ج، د]
٣. التي [الذي: آ، د]
٤. قاعدته [قاعدة: د، ١٥]
٥. و [و: د]
٦. التي [الذي: آ، ج]
٧. قاعدة او [قاعدته: ز؛ و] + ت، + د
٨. المجسمان [المجسمان: ج]
٩. زي [زو: د]
١٠. زد [زو: آ، ج؛ وز: د]
١١. زي [زب: ج]
١٢. تكون [فكون: آ؛ يكون: د]
١٣. او [از: ج]
١٤. و [و: آ]
١٥. فنسبة المربعة إلى المدورة [د، - آ، - ج]
١٦. المستديرة [المدورة: آ]
١٧. وذلك ما أردناه [آ، - ت]

فننصف قطر اج المحيطة بها على ب ونرسم عليه دائرة مساوية لضعف دائرة اج في سطحها. وينبغى أن يكون محيط دائرة س ع أصغر من نصف محيطي ١ [و] ج. وندير على ه مركز الدائرتين دائرتين ١ تماسان ٢ دائرة س ع. فوصلنا إلى المطلوب. لأن س ع ضعف اج ف ضرب محيط ب في دائرة ٢ س ع وهو تكسير الحلقة المحيطة بها دائرة س ع مثل ضربه في دائرة اج مرتين. فقد زدنا في غلط حلقة اج زيادة مثلها. وقد يمكننا هذا التدير أن نزيد على حلقة مفروضة زيادة على أى نسبة أردنا إليها.^٥

[٧] نريد أن ننقص من غلط حلقة مفروضة نقصاً مساوياً لنصفها.

وبرهانه عكس البرهان المتقدم. لأنه فصل ٦ من الحلقة المحيطة بغلطها مطوّفاً مساوياً لنصف المحيطة.^٧ و نرسم ثلاث دوائر^٨ اخر. و نبين المطلوب على عكس النهج المتقدم - وهو المراد.^٩

١. دائرتين [د + ١]
٢. تماسان [يماسان: آ]
٣. دائرة [ت - ت]
٤. يمكننا [تمكننا: د٢]
٥. إليها [ت - ت]
٦. فصل [نفس: ج، د٢]
٧. المحيطة [محيط: د٢]
٨. دوائر [دائرة: آ]
٩. انتسخ، ليس في المنتسخ منه أكثر من ذلك [د + ١]