

Ibn Kushna al-Qumī's Treatise in Refutation of Passages from al-Karajī's *al-Kāfī fī al-ḥisāb*

Narges Assar zadegan¹ , Hanif Ghalandari²  

1. Isfahan Mathematics House, E-mail: narges.assarzadegan@gmail.com

2. Institute for the History of Science, Faculty of Theology and Islamic Studies, University of Tehran,

E-mail: hanif.ghalandari@ut.ac.ir

Article Info

Article type:

Research Article

Article history:

Received: 5 September 2025

Revised: 18 October 2025

Accepted: 20 October 2025

Published online: 11 November 2025

Keywords:

Abū al-‘Abbās Nayrīzī, determination of the Earth's weight, geometry, Ibn Kushna al-Qumī, Karajī, Kūshyār Gīlānī, the area of the inhabited quarter of the Earth.

ABSTRACT

Muḥammad ibn Kushna al-Qumī, an Iranian mathematician active during the 4th–5th centuries AH (10th–11th centuries CE), composed a treatise entitled ‘*Uddat Masā’il li-Ibn Kushna fī al-Radd ‘alā Mawāḍi‘ min Kitāb al-Kāfī li-l-Karajī*. This work constitutes a critical examination of five sections from the geometric part of al-Karajī's *al-Kāfī fī al-ḥisāb*. The topics addressed include: the extraction of an arc from its chord, the diameter of the circumcircle of regular polygons, the surface area of the sphere, the area of the inhabited quarter of the Earth, the surface area of the cone, the volume of the sphere, and methods for measuring ground elevation in the excavation of canals and qanāts—each supported by rigorous geometric reasoning. While most of Ibn Kushna's objections are framed in purely geometric terms, in certain cases, such as the second problem, he challenges the general validity of propositions formulated by al-Karajī by offering counterexamples. In the third problem, he critiques an astronomical method of measurement, referring to a chapter in the third book of Kūshyār's *Zīj jāmi‘* (on hay’a), where he identifies an error in the method of computation. This paper evaluates the soundness of Ibn Kushna's criticisms of selected geometrical arguments in al-Karajī's *al-Kāfī fī al-ḥisāb* from a mathematical perspective.

Cite this article: Assar zadegan, N. & Ghalandari, H. (2025). Ibn Kushna al-Qumī's Treatise in Refutation of Passages from al-Karajī's *al-Kāfī fī al-ḥisāb*. *Journal for the History of Science*. 23 (1), 81-109.

DOI: 10.22059/jihs.2025.401845.371838



© The Author(s).

Publisher: University of Tehran Press

رساله ابن کشنه قمی در ردّ مواضعی از الکافی فی الحساب کرجی

نرگس عصارزادگان^۱، حنیف قلندری^۲ ✉

۱. خانه ریاضیات اصفهان، رایانامه: narges.assarzadegan@gmail.com

۲. پژوهشکده تاریخ علم، دانشکده الهیات و معارف اسلامی، دانشگاه تهران، رایانامه: hanif.ghalandari@ut.ac.ir

اطلاعات مقاله	چکیده
نوع مقاله: پژوهشی تاریخ دریافت: ۱۴۰۴/۰۶/۱۴ تاریخ بازنگری: ۱۴۰۴/۰۷/۲۶ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۰۷/۲۸ تاریخ انتشار: ۱۴۰۴/۰۸/۲۰ کلیدواژه‌ها: ابن کشنه قمی، ابوالعباس نیریزی، کرجی، کوشیار گیلانی، مساحت ربع مسکون، معرفت وزن زمین، هندسه.	محمد بن کشنه قمی ریاضی‌دان ایرانی سده ۴ و ۵ هجری قمری است. رساله عده مسائل لابن کشنه فی الردّ علی مواضع من کتاب الکافی للکرجی، نقدی بر پنج باب از مباحث هندسی الکافی فی الحساب کرجی در باره استخراج قوس از وتر، قطر دایره محیطی در چندضلعی‌های منتظم، مساحت بسیط کره، مساحت ربع مسکون، مساحت بسیط مخروط، حجم کره و چگونگی سنجش ارتفاع زمین برای حفر نهر و قنات است که به براهین هندسی مبرهن شده است. نقدها عمدتاً ساختاری کاملاً هندسی دارند، اما در برخی نقدها، مانند مسأله دوم، ابن کشنه متعرض صورت کلی قضیه‌ای شده است که کرجی در کتاب خود آورده بود. او با عرضه یک مثال نقض کلی بودن قضیه گفته شده را نقض می‌کند. در مسأله سوم او در باره یک روش اندازه‌گیری نزد منجمان صحبت می‌کند و با یاد کردن از فصلی از باب سوم زیج جامع کوشیار، که در موضوع هیئت است، خطایی را در روش محاسبه او گوشزد می‌کند. در این نوشته درستی نقدهای او را، بر بخش‌هایی از مباحث هندسی الکافی فی الحساب کرجی از لحاظ ریاضی می‌آزماییم.
استناد: عصارزادگان، نرگس؛ قلندری، حنیف (۱۴۰۴). رساله ابن کشنه قمی در ردّ مواضعی از الکافی فی الحساب کرجی. تاریخ علم، ۲۳ (۱)، ۸۱-۱۰۹. DOI: 10.22059/jihs.2025.401845.371838 ناشر: مؤسسه انتشارات دانشگاه تهران. © نویسندگان.	



مقدمه

زمان دقیق زندگی رشیدالدین ابوجعفر محمد بن احمد بن محمد بن کشته^۱ قمی معلوم نیست، بر اساس نام‌هایی که او در نوشته‌های خود از آنها یاد کرده است حدود زمان زندگی او به دست می‌آید و محققان آن را نیمه دوم سده ۴ و نیمه نخست سده ۵ هجری دانسته‌اند. او در آثارش از کرجی (?-ح ۴۲۰)، ابوالعباس فضل بن حاتم نیریزی (نیمه دوم سده سوم و اوایل سده چهارم)، کوشیار گیلانی (ح ۳۳۰- اوایل سده پنجم) و سجزی (ح ۳۳۰-ح ۴۱۵) نام برده است. بر این اساس احتمالاً او معاصر یا معاصر جوان‌تر دانشمندانی است که در نیمه نخست سده پنجم هجری می‌زیسته‌اند. فهرست‌نویس کتابخانه لایدن ابن کشته و سجزی را معاصر دانسته است^۲ ولی قربانی این نظر را نپذیرفته است (قربانی، ۴۴۲). دو رساله به زبان عربی از او باقی است: عدة مسائل لابن کشته فی الرد علی مواضع من کتاب الکافی للکرجی و فی إبانة الخطین اللذین یقربان ابدأً ولایتیقان (برای آگاهی از نسخه‌های خطی این دو رساله نک: قربانی، ۴۴۲-۴۴۳، سرگین، ۵/ ۳۳۶ و ۴۰۳). ابن کشته در مقدمه رساله فی إبانة... می‌گوید این رساله را در پاسخ به فردی به نام^۳ أبوالبدر عبدالعزیز بن علی بن عبدالعزیز نوشته است (الابانة...، نسخه لایدن، ۲۳۲) که او نیز شناخته شده نیست. در این مقاله برهان‌هایی که او در رد مطالب کرجی آورده است بررسی شده‌اند و درستی آنها تحقیق شده است.

ابن کشته در پنج بخش از رساله عدة مسائل... مباحث هندسی باب‌های ۴۷، ۴۸، ۴۹، ۵۰ و ۵۲ کتاب الکافی فی الحساب کرجی را به دیده نقد نگریسته و با استناد به برهان‌های هندسی ایراداتی به آنها وارد دانسته است. او به مسائلی در باره استخراج قوس از وتر، قطر دایره محیطی در چندضلعی‌های منتظم، مساحت کره، مساحت ربع مسکون، مساحت مخروط، حجم کره و در معرفت وزن زمین برای حفر قنات پرداخته است. همچنین در بخش مساحت کره، با عرضه دلایل هندسی، محاسبات کوشیار گیلانی را در مورد سطح بسیط ربع مسکون نقد می‌کند. در بخش موازین الارض نیز به خطای نیریزی در رساله فی عمل الآلات التي تعرف بها بُعد الاشياء^۴ بدون هیچ توضیحی، اشاره کرده است.

۱. در برخی منابع او را ابن کشته (IBN KUSHNA) (احمد جبار، ۱۶۸) و در برخی ابن کشته (Mhammad B. Kišna) نامیده‌اند (سرگین، ۴۰۳).

۲. شاید به این دلیل است که ابن کشته نام ریاضی‌دانان در گذشته را با عبارت «رحمه الله» همراه کرده است ولی نام سجزی به تنهایی نوشته شده است: «... وأن لا یكون مسلک فیہ مثل مسلک أحمد بن محمد بن عبد الجلیل السجزی حیث استعصب هذا الشكل ...» (نسخه مشهد، ۲۲، لایدن، ۲۳۲).

۳. سألني الاجل منتخب الدولة، أبوالبدر عبدالعزیز بن علی بن عبدالعزیز، حرس الله مجده، أن أبین إمكان وجود الخطین اللذین یقربان ابدأً ولایتیقان «...»

۴. رساله نیریزی این طور آغاز شده است: «هذا الكتاب الفضل بن حاتم نیریزی للقسم بن عبدالله بن موسى فی معرفة آلات تعلم بها ابعاد الاشياء الشاخصة فی الهواء والتي علی بسط الارض و اغواد الادویه والابار و عرض الانهار...» (نسخه خطی ایاصوفیه ۴۸۳۰، گ ۲۱۵-۲۱۹ پ).

ابن کشنه در رساله فی إبانة الخطین... مسأله مجانب‌های هذلولی از مقاله دوم مخروطات را که سجزی با استفاده از قضایای مخروطات آپلونیوس حل کرده، با روشی ملموس و مختصر و بی‌نیاز از مخروطات حل کرده است. راشد در مقاله‌ای با عنوان «مجانب‌های هذلولی: آپلونیوس و خواندگانش»^۱ این رساله را تصحیح کرده و شرح مفصلی بر آن نوشته است. او به ارتباط میان ریاضیات و فلسفه که در موضوعاتی چون بی‌نهایت کوچک‌ها، مفهوم حد و همگرایی و مجانب‌های هذلولی پدیدار می‌شود اشاره کرده و شرحی از روش آپلونیوس در مخروطات، روش سجزی و در آخر روش متفاوت ابن کشنه که بر قضایای اصول اقلیدس مبتنی است عرضه کرده است. فخرالدین رازی نیز در مطالب العالیه من علم الالهی (۱۶۶/۶) به وجود روشی متفاوت برای حل مسأله مجانب‌های هذلولی اشاره کرده است (راشد، ۲۰۱۰، ۴۳۵-۴۶۷). در باره موضوع این رساله که در ارتباط با سنت ریاضیات یونانی است پژوهش‌های دیگری نیز شده است.^۲ سجزی مسأله مجانب‌های هذلولی را به دلیل ارتباط با مفهوم بی‌نهایت در زمره مسائلی می‌داند که درک آنها با مبادی فلسفی ممکن است (نسخه خطی لایدن، Or.14، ۲۳۶-۲۳۱). در تمدن اسلامی علاوه بر سجزی، ابن هیثم، ابن میمون^۳ و ... در این موضوع آثاری تألیف کرده‌اند.^۴

به قرینه اشاره‌های ابن کشنه، او آثار دیگری نیز در ریاضیات داشته است. برای مثال، در ضمن رساله اول به تألیف رساله مفردی درباره کیفیت وزن زمین و رساله‌ای درباره محاسبه مساحت ربع مسکون و بررسی روش کوشیار اشاره کرده است.

رساله در رد مواضع ابوبکر حاسب کرجی در کتاب الکافی فی الحساب

نسخه یگانه رساله عدة مسائل لابن کشنه فی الرد علی مواضع من کتاب الکافی للکرجی به شماره ۵۵۹۳/۳ در کتابخانه آستان قدس رضوی (مشهد) نگهداری می‌شود و در تاریخ ۸۶۷ق به خط نستعلیق تحریری کتابت شده است. نسخه ۷ برگ دارد (۳۹-۴۵) و بخشی از مجموعه‌ای شامل رساله فی إبانة الخطین ... ابن کشنه و رساله‌ای از ابن صلاح همدانی در باره چند مسأله هندسی است.

در تصحیح انتقادی نسخه به دلیل یکتایی آن، از شیوه مقایسه با متون موازی استفاده شد. بخش‌هایی از متن

۱. رشدی راشد در مقاله L'Asymptote: Apollonius et ses lecteurs در سال ۲۰۱۰ تصحیح کرد و در مجله Bollettino di storia delle scienze matematiche منتشر شد. این مقاله در سال ۲۰۲۳ در مجموعه مقالات راشد در کتابی ۴ جلدی با عنوان *Écrits d'histoire et de philosophie des sciences* چاپ شد (ج ۴، ۴۳۵-۴۶۷).

۲. برای نمونه:

Djebbar, A. (2000): *La place et le rôle de l'imagination dans les activités mathématiques de la tradition arabe médiévale*, Actes du Colloque International sur «Imagination and Sciences» (Rabat, 1998), A. Benmaïssa (édit.), Rabat, Publications de la Faculté des Lettres et des Sciences Humaines, pp. 153-176.

۳. در رساله حواشی علی بعض اشکال کتاب المخروطات

۴. رساله سجزی با عنوان فی کیفیت التصور الخطین اللذین یقربان ولایلتقیان را زینب کریمیان در ۱۳۹۱ در پایان‌نامه کارشناسی ارشد خود ترجمه و تصحیح و درباره آن تحقیق کرده است.

که به الکافی فی الحساب کرجی و زیج جامع کوشیار گیلانی مربوط بود در قیاس با آن‌ها تصحیح شد. علاوه بر این، بخش موازین ارض با غنیة الحساب احمد بن نبات (گ ۱۳۷ پ- ۱۳۹ پ) و چند رساله دیگر مقایسه شد (نک: دنباله مقاله)، زیرا حاوی اطلاعات کامل‌تری نسبت به سایر نسخه‌ها در باره موضوع است. جای شکل‌های رساله در نسخه خالی است، پس شکل‌ها بر اساس متن بازسازی و ترسیم شد. متن مصحح عربی رساله در پیوست آمده است.

در باره استخراج قوس از وتر

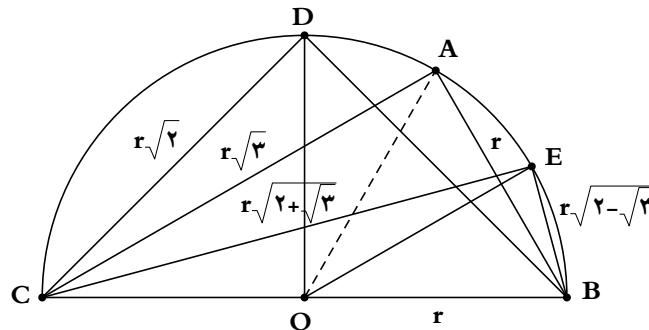
نخستین نقد ابن کشنه به باب ۴۷ الکافی فی الحساب با عنوان «فی مساحة القوس» است (۱۴۱-۱۴۵). کرجی در این باب پس از محاسبه مساحت قوس، به موضوع استخراج قوس از وتر و وتر از قوس، مبتنی بر قضایای هیئت پرداخته است. کرجی ابتدا قوس مربوط به وترهای معلوم دایره یعنی ۳۰، ۶۰، ۹۰، ۱۲۰ و ۱۵۰ درجه را در صورت معلوم بودن وتر و سهم^۱ و در نتیجه قطر دایره حساب کرده است (شکل ۱، جدول ۱).

جدول ۱. طول وترهای قوس‌های معلوم طبق روش کرجی

قطر دایره ۲۲		
طول وتر Crd (AB)	زاویه به درجه α	قوس (در نیم‌دایره) ^۲ $\widehat{AB}$
r	۶۰	ثلث
$r\sqrt{3}$	۱۲۰	ثلثی (دو سوم)
$r\sqrt{2}$	۹۰	نصف
$r\sqrt{2 - \sqrt{3}}$	۳۰	سدس
$r\sqrt{2 + \sqrt{3}}$	۱۵۰	نصف و ثلث

۱. سهم: پاره خطی است که قوس و وتر را به دو قسمت مساوی تقسیم کرده باشد.

۲. باید توجه داشت که کرجی در این بخش اصطلاحات را در نیم‌دایره تعریف کرده است، یعنی منظور از «وتر ثلث» ثلث نیم‌دایره است.



شکل ۱. وترهای نظیر قوس‌های ۳۰، ۶۰، ۹۰، ۱۲۰ و ۱۵۰ درجه طبق روش کرجی

مطابق با الگوریتم کرجی، اگر وترى که قوس آن مجهول است یکی از وترهای معلوم بالا نباشد، باید نزدیک‌ترین وتر معلوم به وتر با قوس مجهول را در نظر گرفت و از دستوره‌های (۱) قوس وتر نامعلوم را محاسبه کرد $\theta + \alpha$ زاویه متناظر با وترى است که می‌خواهیم قوس آن را به دست آوریم. θ یکی از زوایای معلوم و α مقداری است که بیشتر یا کمتر از زاویه معلوم است):

$$\widehat{AB} = \frac{31}{30} \text{crd}(AB)$$

$$\widehat{AB} = \frac{31}{30} (\text{crd}(\theta + \alpha) - \text{crd}(\theta)) \quad (۱)$$

در محسوطی بطلمیوس همین روش درون‌یابی برای محاسبه قوس وترهای با فواصل $\frac{1}{p} = \alpha$ آمده است (تومر، ۵۴؛ ون بروملن، ۷۷). در ادامه کرجی می‌گوید اساس روش او استفاده از قضیه بطلمیوس است:

و بدان هر چهارضلعی که در دایره قرار می‌گیرد پس ضرب یک قطر در قطر دیگر مساوی مجموع حاصل ضرب دو ضلع مقابل است و این روش از این قضیه نتیجه شده است. پس این روش بهترین روش برای این معنی است. ماسح با این روش بی‌نیاز از محاسبه مساحت قوس و ذرعش است (۱۴۵).

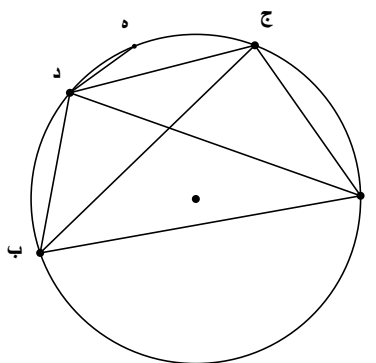
این کشته پس از اشاره به گفته کرجی در باب ۴۷ الکافی فی الحساب می‌گوید این عمل موجب تحقیق نیست و در تقریب دقیقی نیست و دلایل خود را بر رد این روش می‌آورد. او به کار گرفتن قضیه بطلمیوس توسط کرجی را برای به‌دست آوردن وتر **جد** با داشتن وترهای **اد**، **اج**، **بد**، **بج** شرح می‌دهد:

در کتب هیئت چنین عمل شده است که وقتی وتر **اج** را در وتر **دب** ضرب کنی و حاصل را از ضرب وتر **اد** در وتر **بج** کم کنی و حاصل را به وتر **اب** تقسیم کنی، خارج قسمت همان است،

1. Toomer

2. Van Brumelen

این خارج قسمت عمل ابوبکر را موجب می‌شود. و وقتی به خارج قسمت $\frac{1}{3} \times \frac{1}{10}$ آن را بیفزایی، قوس **جد** به دست می‌آید (۳۹) (شکل ۲).



شکل ۲. رساله ابن کشنه

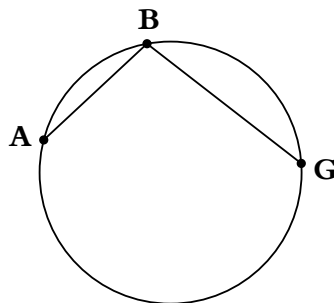
سپس ابن کشنه می‌نویسد کرجی $\frac{1}{3}$ هر وترى را به آن افزوده تا قوس آن به دست آید (دستورهای ۱). حال اگر فرض کنیم نسبت دو قوس متمایز به وترهایشان برابر $\frac{31}{30}$ باشد، طبق گفته کرجی برای دو قوس متمایز GD و HD داریم:

$$\frac{GD}{\text{crd}(GD)} = \frac{31}{30}, \frac{HD}{\text{crd}(HD)} = \frac{31}{30}$$

پس با استفاده از ویژگی تبدیل نسبت داریم: $\frac{HD}{GD} = \frac{\text{crd}(HD)}{\text{crd}(GD)}$. در نتیجه نسبت وترها با نسبت قوس‌ها برابر است. ابن کشنه می‌گوید این نتیجه‌گیری نادرست است و در کتب هیئت خلاف این آمده است.

دلیل نادرستی نتیجه کرجی این قضیه است که اگر دو وتر نامساوی داشته باشیم، نسبت وتر بزرگ‌تر به وتر کوچک‌تر، از نسبت قوس بزرگ‌تر به قوس کوچک‌تر، کوچک‌تر است (بطلمیوس،^۱ ۵۴). یعنی اگر

$$\text{crd}(AB) < \text{crd}(BG), \text{ آن‌گاه } \frac{\text{crd}(BG)}{\text{crd}(AB)} < \frac{BG}{AB} \text{ (شکل ۳).}$$



شکل ۳. قضیه دو وتر نامساوی

در باره قطر دایره محیطی چندضلعی‌های منتظم

نقد این بخش به محاسبه مساحت چندضلعی‌های منتظم در باب ۴۸ الکافی فی الحساب کرجی، با عنوان «باب ذکر مساحة ذوات الأضلاع الكثيرة»، است (۱۴۵-۱۴۷). کرجی در این باب روش محاسبه مساحت پنج، شش و هفت ضلعی منتظم و هر n -ضلعی منتظم را گفته (دستورهای ۲) و مثالی از شش ضلعی منتظمی به طول ضلع a آورده است (۲ر قطر دایره محیطی و $2R$ قطر دایره محاطی، a طول ضلع n -ضلعی منتظم، p محیط دایره محاطی و S مساحت چند ضلعی منتظم است).

$$S = r \cdot \frac{p}{2}$$

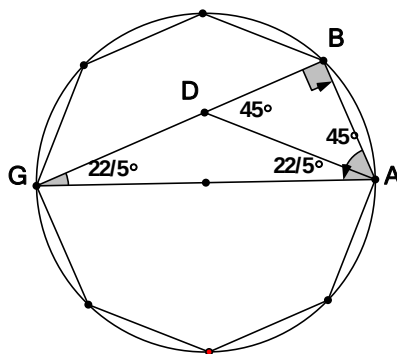
$$2r = \sqrt{\frac{1}{9}(n^2 - n + 6) \cdot a^2} \text{ و } 2R = \sqrt{4r^2 - a^2} \quad (2)$$

این کشته می‌گوید اینجا لغزش بزرگی رخ داده است، چون وقتی قضیه‌ای به عنوان قضیه کلی قلمداد می‌شود که بتوان آن را برای همه موارد ثابت کرد، در حالی که دستور کرجی برای هشت ضلعی منتظم درست نیست. این کشته پس از عرضه استدلال هندسی می‌گوید:

پس طریقی که ابوبکر حاسب ذکر کرد در هشت ضلعی درست نیست. و سالبه جزء، ناقض موجب

کلی است. لکن جزء اینجا سالبه است. پس نباید حکم کلی داد و حکم کلی باطل است (۴۱).

فرض کنیم AB ضلع هشت ضلعی منتظم و AG قطر دایره محیطی است (اطلاعات روی شکل با توجه به متن رساله درج شده است) (شکل ۴):



شکل ۴

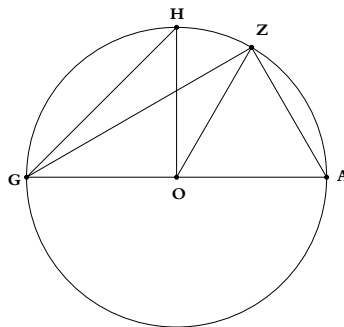
$$\begin{aligned}
 AB = BD &\Rightarrow AB^{\vee} = BD^{\vee} \\
 AD = DG &\Rightarrow AD^{\vee} = DG^{\vee} \\
 AD^{\vee} = BD^{\vee} + AB^{\vee} &\Rightarrow AD^{\vee} = {}^{\vee}BD^{\vee} = {}^{\vee}AB^{\vee} \\
 AD^{\vee} = DG^{\vee} &= {}^{\vee}BD^{\vee} \quad (3) \\
 AG^{\vee} &= AB^{\vee} + BG^{\vee} \quad (\varepsilon)
 \end{aligned}$$

اما طبق روش کرجی (با توجه به دستور ۲) برای ۸ ضلعی منتظم داریم ($n = 8$) (شکل ۴):

$$\begin{aligned}
 AG^{\vee} &= {}^{\wedge}\frac{8}{9}AB^{\vee} \Rightarrow AB^{\vee} + BG^{\vee} = {}^{\wedge}\frac{8}{9}AB^{\vee} \Rightarrow BG^{\vee} = {}^{\wedge}\frac{8}{9}AB^{\vee} \\
 BG^{\vee} &= (GD + BD)^{\vee} = GD^{\vee} + BD^{\vee} + {}^{\vee}GD.BD = {}^{\wedge}\frac{8}{9}DB^{\vee} \\
 {}^{\vee}BD^{\vee} + BD^{\vee} + {}^{\vee}GD.BD &= {}^{\wedge}\frac{8}{9}DB^{\vee} \Rightarrow {}^{\vee}GD.BD = {}^{\vee}\frac{8}{9}DB^{\vee} \Rightarrow {}^{\vee}GD \\
 &= {}^{\vee}\frac{8}{9}DB \Rightarrow GD = {}^{\vee}\frac{4}{9}BD \\
 &\Rightarrow GD^{\vee} > {}^{\vee}BD^{\vee}
 \end{aligned}$$

و این نتیجه با رابطه (۳) در تناقض است.

در ادامه ابن کشنه وتر سُدس، ثلث و ربع دایره (به ترتیب ضلع مثلث متساوی الاضلاع، ۶ ضلعی منتظم و مربع) و روابط میان این وترها و قطر دایره محیطی را با استدلال‌های هندسی به دست آورده است. دلایل ابن کشنه را این طور می‌توان نوشت (AZ طول ضلع ۶ ضلعی منتظم، GZ طول ضلع مثلث متساوی الاضلاع و GH طول ضلع مربع محاط در دایره است) (شکل ۵):



شکل ه

$$\begin{aligned}
 AG^2 &= 4AO^2 = 4AZ^2 \\
 AO^2 &= AZ^2 \\
 AG^2 &= AZ^2 + GZ^2 = 4AZ^2 \\
 GZ^2 &= 3OA^2 = \frac{3}{4}AG^2 \\
 AG^2 &= \frac{4}{3}GZ^2 \\
 GO^2 &= \frac{1}{2}GH^2 \\
 AG^2 &= 2GH^2
 \end{aligned}$$

دست آخر این کشته پس از تحقیق درستی رابطه (۲) کرجی برای مثلث متساوی الاضلاع، مربع و شش ضلعی منتظم می گوید (۴۱):

پس علت طریقی که ابوبکر -رحمه الله- در این شکل های سه گانه ذکر کرد آشکار شد. و برهانی را که گفته است نمی شود تعمیم داد چون طریق جزء جزء را نمی توان در جمیع سطوح پذیرفت، حتی اگر متساوی الاضلاع والزاویا باشند.

در باره مساحت سطح کره و مخروط و سطح زمین

این بخش نقدی است بر باب ۴۹ الکافی فی الحساب کرجی با عنوان «باب آخر فی مساحة السطوح» (۱۴۷-۱۴۸) که در باره محاسبه مساحت جانبی کره و مساحت بسیط مخروط است. علاوه بر این، بر موضوع مساحت ربع مسکون توسط کوشیار گیلانی نقدی داشته است.

- مساحت بسیط کره

کرجی در باره مساحت جانبی کره می گوید (۱۴۸):

و اگر بخواهیم مساحت سطح کره را به دست آوریم قطرش را در خودش و سپس در ۴ ضرب می کنیم و از مبلغ $\frac{1}{14} + \frac{1}{7}$ آن را کم می کنیم. این چیزی است که قدما گفته اند. و چیزی که من

در مساحت کره می‌گوییم این است که نصف قطرش را در نصف محیطش و سپس در ۴ ضرب کن. و این واضح‌تر است و تقریب بهتری به جواب درست دارد.
اما ابن کشته در باره مساحت جانبی کره می‌گوید (۴۲):

روشی که به ارشمیدس منسوب است به براهین هندسی محقق شده است، و گفته او در مساحت بسیط کره این است که [مساحت] بزرگ‌ترین دایره واقع در آن را در ربع آن ضرب کنیم؛ که تنها در این مثال واحد درست است؛ و آن اینکه اگر قطر کره را جذر ۲۰ و ۴ جزء از ۱۱ جزء فرض کنی، و این مقدار قطر اعظم دایره واقع در کره است و هر دایره قطرش این مقدار باشد، مساحتش ۱۶ است. و [مساحت بسیط کره] از ضرب مساحت دایره عظیمه در ۴ به دست می‌آید، که همان رُبع ۱۶ است. اگر قطر دایره عظیمه را افزایش دهی مقدار مساحتش حتماً از ۱۶ بیشتر می‌شود. و اگر قطر دایره را کاهش دهی، به این ترتیب مساحت دایره عظیمه حتماً از ۱۶ کمتر می‌شود. و این افزایش و کاهش حد محدودی ندارد و تا بی‌نهایت ادامه دارد.

در این مثال قطر دایره عظیمه از رابطه به دست می‌آید $\sqrt{20 + \frac{4}{11}}$ و در نتیجه مساحت دایره عظیمه از رابطه زیر به دست خواهد آمد:

$$S = \frac{22}{7} \left(\frac{1}{2} \sqrt{20 + \frac{4}{11}} \right)^2 = 16$$

ارشمیدس در رساله کره و استوانه و رساله روش‌ها، فرمول کلی محاسبه سطح جانبی کره، یعنی ۴ برابر مساحت دایره عظیمه را بدون ذکر مثال گفته است (هیث، ۳۹-۴۰). در متریکای هرون اسکندرانی (I/38)^۱ علاوه بر رابطه، مثالی برای کره‌ای به قطر ۱۴ آمده است. ابن کشته این اشتباه را به کاتبان نسبت داده است چون در همه نسخ دیده نمی‌شود. گویا توجه به مفهوم حدی افزودن و کاستن اندازه شعاع و در نتیجه افزایش و کاهش مساحت دایره عظیمه به عدد ۱۶ و توجه به مفهوم بی‌نهایت، دیدگاه ویژه ابن کشته با مبانی فلسفی به ریاضیات است: و هذه الزيادة والنقصان لا يبقیان عند حد محدود، بل يتزايد الزيادة و ينقص النقصان إلى غیرالنهاية (۴۲).

- مساحت جانبی مخروط

کرجی در «باب آخر فی مساحة السطوح» دستور محاسبه مساحت سطوحی با دو قاعده موازی (مثل استوانه مدور و مخروط ناقص) را توضیح داده و در باره ترازوی دو قاعده این نوع اشکال گفته است: «و دو سطح موازی آن دو

1. Available from: <https://scaife.perseus.org/reader/urn:cts:greekLit:tlg0559.tlg006.1st1K-grc1:1.pr/>

سطحی اند که وقتی از هر دو جهت خارج می‌شوند تلاقی نمی‌کنند» (ص ۱۴۸). ابن کشنه در این باره گفته است: «و بر من آشکار شد گفته او در مساحت بسیط مخروط همیشه درست نیست، چون طبق این تعریف اگر سطح‌ها یکی (منطبق) باشند، موازی نیستند» (۴۲).

- مساحت ربع مسکون

ابن کشنه در اینجا به سراغ روش کوشیار گیلانی در محاسبه سطح بخش آباد زمین^۱ رفته است. کوشیار در دهمین باب از مقاله سوم زیج جامع در این باره سخن گفته است (کوشیار گیلانی، گ ۳۲۴ پ). او در آغاز این باب چند قضیه آورده است و آنها را به ارشمیدس منتسب می‌کند. این قضایا از این قرارند:

- در هر دایره‌ای نسبت قطر به محیط تقریباً با نسبت $\frac{7}{22}$ برابر است (نتیجه قضیه سوم از رساله تکسیر دایره)؛
- در هر دایره‌ای حاصل ضرب مقدار قطر در ۲۲ و تقسیم حاصل ضرب بر ۷ برابر با محیط آن دایره است و اگر محیط دایره در ۷ ضرب شود و حاصل ضرب بر ۲۲ تقسیم شود قطر دایره به دست می‌آید؛
- [مساحت] هر دایره‌ای با [مساحت] مثلث قائم‌الزاویه‌ای برابر است که یکی از اضلاع قائم آن برابر با محیط دایره باشد و ضلع دیگر با شعاع دایره برابر باشد (قضیه اول از رساله تکسیر دایره)؛
- سطح کره چهار برابر مساحت دایره عظیمه آن کره است (قضیه ۳۳ از کتاب اول در باره کره و استوانه)؛
- حاصل ضرب قطر در قطاعی از دایره عظیمه که سطح کره را نصف می‌کند برابر با مساحت آن قطعه از کره است^۲ (قضیه ۴۲ از کتاب اول در باره کره و استوانه)

کوشیار این قضیه اخیر را در محاسبه مساحت بخش آباد زمین به کار گرفته است. او می‌نویسد اگر حصه یک درجه (یعنی طول قوس یک درجه از محیط زمین) را - که بر اساس رصد اصحاب ممتحن^۳ در دوره خلافت مأمون $56\frac{2}{3}$ میل است - در مقدار قوس متمم میل کلی (یعنی $66\frac{5}{12}$ درجه) ضرب کنیم طول قوسی از زمین از استوا تا پایان عمارت^۴ به دست می‌آید. سپس اگر حاصل ضرب را در مقدار قطر زمین ضرب کنیم مساحت بخش معمور زمین حاصل می‌شود.

$$56\frac{2}{3} \times 66\frac{5}{12} = 3736\frac{2}{3}$$

۱. بخش آباد زمین که در متون نجومی و جغرافیایی گذشته آن را «ربع مسکون» یا «بخش معمور» زمین می‌خواندند به آن قسمت از زمین گفته می‌شد که معتقد بودند در آن آبادانی وجود دارد و انسان‌ها در آن مناطق زندگی می‌کنند. قوما بر این باور بودند که این محدوده حدود یک ربع از سطح زمین را شامل می‌شود و از این رو آن را بدین نام خوانده‌اند.

۲. برای مثال، اگر $\alpha = \frac{\pi}{4}$ باشد، $S = 2r \cdot \frac{\pi r}{4} = \pi r^2$

۳. برای اطلاعات بیشتر نک: قلندری، «مقاله سوم...»، ۴۹.

۴. برخی نویسندگان آثار هیئت پایان بخش آباد زمین را در عرض جغرافیایی حدود ۶۷ درجه گفته‌اند و برخی در عرض جغرافیایی ۴۹ درجه. این اختلاف از تفاوت در معیار تقسیم‌بندی بخش مسکون زمین نشأت می‌گیرد (در این باره نک: قلندری، مقدمه،، ۱۲۳-۱۲۴، ۱۳۰).

$$۳۷۳۶ \frac{۲}{۳} \times ۶۴۹۱ = ۲۴۴۲۹۹۶۰$$

ابن کشنه در این بخش از این محاسبه یاد می‌کند و معتقد است کوشیار در این استنتاج اشتباه کرده است و یک امر کلی را در باره جزئی به کار گرفته است. او می‌نویسد:

لذا این حکم کلی که با توجه به مصادیق جزئی نتیجه شده گمراه کننده است. اما اجماع اهل تحقیق در این زمینه از میان رفته است، چرا که به سبب ناتوانی و اضطراب، در استقرا به اثبات امور حسی بسنده کرده‌اند و از اثبات عقلیات قطعی بازمانده‌اند.

لکن ممکن است اجماع محققان به دلیلی از میان رفته باشد، زیرا به سبب ناتوانی و اضطراب، در استقرا به امور حسی بسنده کرده‌اند و از اثبات امور قطعی عقلی بازمانده‌اند.

در ادامه ابن کشنه مساحت ربع مسکون را بر این اساس به‌دست آورده است که مساحت تمام مناطق قابل سکونت روی زمین یک ربع از مساحت کل کره را پوشانده است در حالی که کوشیار در روش خود گستردگی بخش قابل سکونت زمین را در عرض جغرافیایی در نظر گرفته است و نه تمام سطح آن را و این خطای محتمل در محاسبه منجمان دیگر نیز دیده می‌شود، در جدول زیر این مقادارها در آثار بطلمیوس، فرغانی و کوشیار با محاسبه ابن کشنه مقایسه شده است.

جدول ۲. مساحت بسیط معموره، از نظر کوشیار گیلانی، فرغانی، ابن کشنه و بطلمیوس با واحد میل

کوشیار	فرغانی	ابن کشنه (با تکیه بر ارشمیدس)	بطلمیوس
محیط کره زمین $۵۶ \frac{۲}{۳} \times ۳۶۰ = ۲۰۴۰۰$	۲۰۴۰۰	۲۴۰۰۰	$۶۶ \frac{۲}{۳} \times ۳۶۰ \approx ۲۴۰۰۰$
مساحت بسیط ارض قطر در محیط = ۱۳۲۴۱۶۴۰۰ میل	۱۳۲۶۰۰۰۰	-	۱۸۳۲۶۴۰۰۰ میل
قوس: تمام میل (ربع مسکون) $۵۶ \frac{۲}{۳} \times ۶۶ \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۶} \approx ۳۷۶۳$ و دو سوم	۳۷۶۴	۹۰ درجه	$۶۶ \frac{۲}{۳} \times ۶۶ \frac{۱}{۴} + ۴۲۰۳ \frac{۱}{۶} \approx$
مساحت معموره (ربع مسکون، بسیط العماره) قطر در قوس = ۲۴۴۲۹۹۶۰ میل	۳۳۱۵۰۰۰۰	۴۲۰۴۴۷۷۸	۳۲۰۹۴۱۰۸ امیال و تسعش

در باره حجم مخروط و حجم کره

ابن کشنه بر موضوعات تعریف مخروط، حجم مخروط و حجم کره در باب ۵۰ الکافی فی الحساب کرجی با عنوان «مساحة المجسمات» نقدی داشته است (۱۴۸-۱۵۲).

- تعریف مخروط و حجم مخروط

کرجی در تعریف مخروط می گوید (۱۴۹):

و قسم دوم مخروطات است و شکلی است که از یک سطح شروع می شود و به یک نقطه ختم می شود و مساحت [جرم]^۱ مخروط عبارت است از ضرب مساحت قاعده در ثلث عمودش. عمودش کوتاه ترین خط بین بالاترین نقطه و قاعده آن است.

ایراد ابن کشنه به تعریف کرجی از مخروط این است که خط واصل میان بالاترین نقطه مخروط و قاعده آن لزوماً ارتفاع مخروط نیست و با توجه به نوع مخروط (قائم- مایل) ممکن است متفاوت باشد.^۲ او نحوه نادقیق بیان کرجی را اختصار در عبارت تعبیر کرده است.

سطح مستوی تصور کن و در آن دایره ای فرض کن و خارج آن دایره نقطه ای دلخواه در نظر بگیر و از آن نقطه خطی عمود بر آن سطح تصور شده در نظر بگیر. رأس این خط رأس مخروط است و قاعده اش آن دایره است که ذکر کردیم. [...] فاصله بین آن نقطه مفروض و دایره تصور شده می تواند ۱۰۰۰۰۰ فرسخ باشد یا می تواند چند برابر این مقدار باشد. و ابوبکر عمود مخروط را خارج کرد و آن خطی است که نقطه أعلا را به قاعده اش وصل می کند. سپس گفت مساحت قاعده در ثلث عمود همان مساحت [جرم] مخروط است. لکن نقطه مفروض در سطح متصور شده خارج از قاعده مخروط است. و ممکن نیست که از رأس این مخروط به قاعده اش خطی خارج کنیم که مساوی با خطی باشد که بر سطح متصور شده عمود استخراج شده است.

- حجم کره

کرجی همراه با یاد کردن از دو روش برای محاسبه حجم کره گفته است: «بین دو عمل تفاوت نزدیکی است و نزد من اولی صحیح تر است.» دستورهای کرجی از این قرارند:

دستور اول:

$$V = \left[(rr)^3 - \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r^4} \right) (rr)^3 \right] - \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r^4} \right) \left[(rr)^3 - \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r^4} \right) (rr)^3 \right]$$

دستور دوم:

۱. مساحت جرم = حجم

۲. «و عموده اقصر خط یصل بین النقطة التي فی أعلاه و بین قاعدته» (الکافی فی الحساب، ۱۴۹)

$$V = \left[(2r)^3 - \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} \right) (2r)^3 \right]$$

ابن کشته این بیان را ضعیف می‌داند، او ابتدا این نتیجه درست را می‌آورد که همیشه نسبت حجم کره به مکعب قطر آن برابر با $\frac{11}{21}$ است در حالی که این رابطه با دستورهای کرجی برقرار نمی‌ماند، بر این اساس ابن کشته این رابطه‌ها را در به‌دست آوردن حجم کره ضعیف می‌داند هرچند هر دو رابطه تقریب‌های خوبی برای این محاسبه‌اند. در رابطه اول این نسبت به این صورت است:

$$\frac{V}{(2r)^3} = \frac{12 + \frac{6}{7} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{7}}{21} = \frac{363}{21} \approx \frac{13}{21}$$

و در رابطه دوم مقدار زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{V}{(2r)^3} = \frac{13 + \frac{1}{15}}{21} \approx \frac{13}{21}$$

در باره وزن زمین برای حفر نهر یا قنات

این بخش یکی از فروع هندسه عملی است و عموماً در پایان بخش مساحت در رساله‌های حساب آمده است. عنوان باب ۵۲ از کتاب الکافی فی الحساب کرجی «باب فی معرفة وزن الأرض» است (۱۵۵-۱۵۷). این مبحث در انبساط المیاه الخفیة (۳۵-۳۹) تألیف کرجی^۱ و «فی موازین الارض» غنیة الحُساب اثر احمد بن ثبات (گ ۱۳۸ پ- ۱۳۹ پ)، شرح الکافی فی الحساب اثر شهرزوری (باب فی معرفة وزن الارض، نسخه خطی یمنی ۸۰۱، گ ۱۷۲ ر- ۱۷۴ ر)، شرح الکافی فی الحساب شقاق بغدادی (گ ۱۳۷ پ- ۱۴۰ ر) و باب «فی وزن الارض» نسخه ۲۴۶۸ پاریس (گ ۳۷ پ- ۳۹ پ) نیز آمده است. ترجمه فارسی این بخش، در شناخت چگونگی سنجیدن زمین‌ها و مکان‌ها^۲ در نسخه خطی پاریس ۱۶۹ (گ ۶۳ ر- ۶۴ پ) نیز آمده است.^۳ در غنیة الحُساب این مسأله در بخش سوم باب حفور آمده است.^۴ احمد بن ثبات در معنی وزن الارض نوشته است (گ ۱۳۸ پ):

۱. ترجمه فارسی این اثر: در استخراج آب‌های پنهانی (۹۳-۹۸)

۲. برای اطلاعات بیشتر نک:

Amini, H. and Reza Kiani Movahhed, pp. 85-103

۳. متن غنیة الحُساب در قیاس با متون دیگر کامل‌تر و گویاتر است، لذا برای درک دقیق‌تر موضوع به غنیة الحُساب رجوع شده است. در کل این بخش، موارد درون [] به غنیة الحساب تعلق دارد. در صورتی که در سایر رساله‌ها توضیحات اضافه‌تری بود با ذکر منبع افزوده شد.

۴. «القسم الاول: معرفة ما يحتاج إليه فی الحفور؛ القسم الثاني: معرفة التقديرات والاعتبار؛ القسم الثالث: معرفة كيفية موازین الارض التي تعرف بها إمكان نقل الماء من موضع إلى موضع آخر» (گ ۱۳۱ پ): شهرزوری مینویسد کرجی چون به طور کامل به بحث حفور نپرداخته پس غفلت کرده است (گ ۱۷۴ ر).

فی موازین الأرض ومعنى وزن الأرض هو التوصل بآلة موضوعه معلومة إلى معرفة المكان المنخفض من المكان المرتفع، إذا عزم السلطان على شق نهر أو قناة. وأراد أن يعلم إمكان نقل الماء إلى حيث يشاء وهي ثلاث موازين.

برای حفر نهر یا قنات، دانستن سطح مکان طبیعی آب نسبت به مکان مصرف آب ضروری است، یعنی اینکه آب باید از جایی در بالادست منتقل شود یا از جایی در پایین دست، مثلاً از یک چاه. سه نوع روش و ابزار برای این منظور معرفی شده است: عمود میزان [میزان المعهودة]، صفيحة میزان شَبَهِيَّة، و انبوبة (تصاویر ۱-۶). الف) نوع اول میزان المعهودة یا عمود میزان، چوبی صُلب از آبنوس یا غیر آن به طول ۵ اشبار^۱ یا کمتر،^۲ عرض ۲ و ارتفاع یک یا دو اصبع است که مکعبی شکل و در نهایت راستی و صافی است. وسط این چوب شکافی^۳ است که در آن زبانه‌ای آهنین قرار دارد که مَنجَمی^۴ مثل ترازو بر آن نصب می‌شود و ذوابة^۵ که مَنجَم را کمی سنگین می‌کند. ب) نوع دوم آن صفيحة میزان شَبَهِيَّة است. مثلی [از جنس مس]^۶ در موضع عمود آن [وسط چوب] قرار دارد که ريسمانی [شاقول] از آن آویزان است و در سر دیگر ريسمان قطعه‌ای است که آن را سنگین می‌کند. در دو طرف قاعده آن مثلث دو میخ مثل دو میخ عضادة اسطربلاب است، تا ريسمان در آن داخل شود. آن ريسمان در موضع عمود، دقیقاً از سوراخ وسط قاعده آویزان است. ج) نوع سوم آن «میزان انبوبة» معروف بین اهل این صنعت است. انبوبة معرفی شده در الکافی فی الحساب یا با ريسمان و میزان و مَنجَم^۷ (زبانه آهنی ترازو) کار می‌کرده است یا با این ساز و کار که در انبوبة قطره قطره آب می‌چکاندند و هر طرف که آب زودتر بیرون می‌ریخت پایین‌تر بود (برای اطلاع از نحوه کارکرد این ابزار نک: رحیمی، ۵۵-۷۴؛ امینی و کیانی، ۸۵-۱۰۳).

۱. «شیر» واحد اندازه‌گیری طول، معمولاً به اندازه عرض یک دست باز یعنی تقریباً ۲۰ تا ۲۴ سانتی‌متر.

۲. مجموعه پاریس ۲۴۶۸: یک ذراع (گ ۲۸۸)؛ شرح شهرزوری: خمس قبضات (گ ۱۷۲)

۳. غنية الحساب: «... ثقباً نافذاً كَتَقَب الزربانة...»، چوب دراز میان خالی را که بدان گلوله گلین پرت کنند زربانة گویند (لغت‌نامه دهخدا).

۴. شاهین ترازو؛ غنية الحساب: مَنجَم

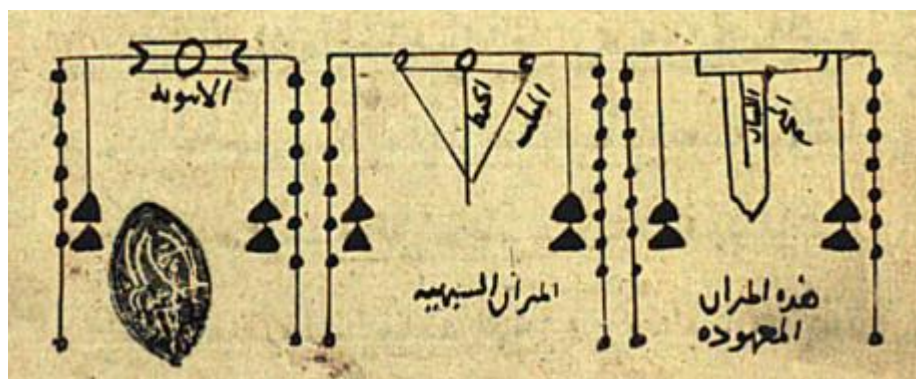
۵. ذوابة: محلول؛ محلولی از سرب؛ «ونجعل فی ذوابة المنجم قليلاً من الرصاص، ليثقله» (غنية الحساب، نسخه مجلس، گ ۱۳۸پ).

۶. مجموعه پاریس ۲۴۶۸، گ ۳۸ر

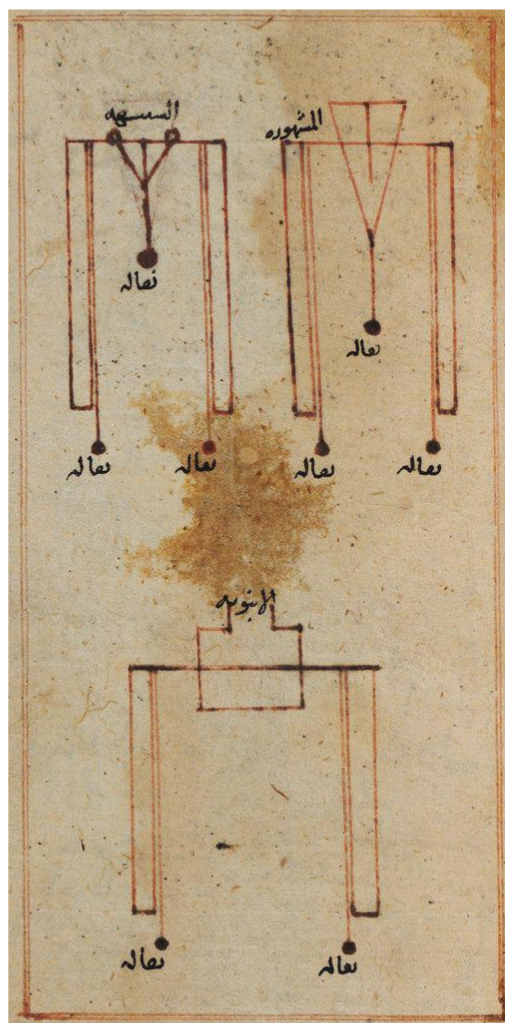
۷. غنية الحساب، نسخه مجلس، گ ۱۳۸پ



تصویر ۱. غنية الحُساب (مجلس، گ ۱۴۰ ر)



تصویر ۲: غنية الحُساب (اباصوفيه، گ ۱۲۵ پ)



تصویر ۳. مجموعه خطی (کتابخانه ملی پاریس ۲۴۶۸، گ ۳۹ر)



تصویر ۴. شرح الكافي في الحساب شقاق بغدادی (گ ۱۳۹ر)

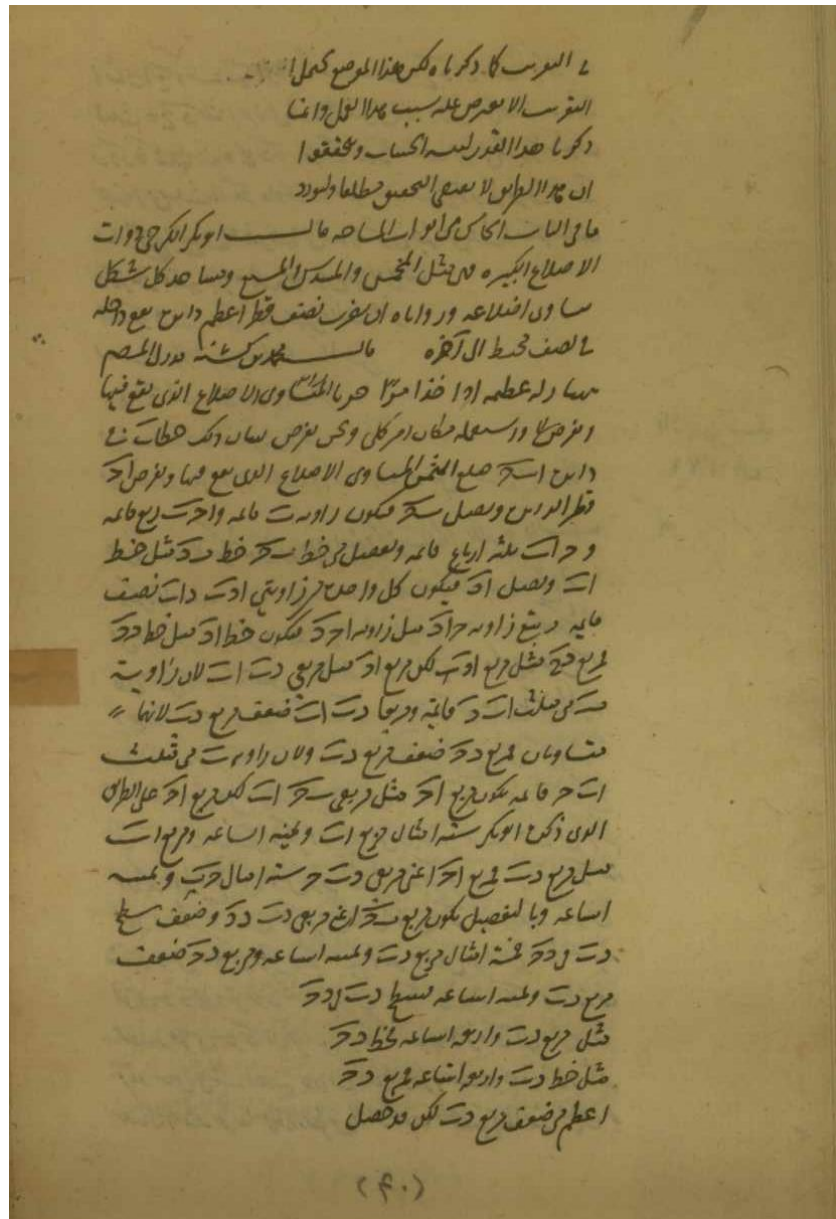


تصویر ۵. شرح الكافي في الحساب شقاق بغدادی. (گ ۱۳۹پ - ۱۴۰ر)



تصویر ۶. شرح الکافی فی الحساب شهرزوری، (گ ۱۷۲۳)

این کشته می گوید که به منظور به کار گرفتن ابزارهای سنجش ارتفاع زمین شرایطی لازم است که کرجی به آنها اشاره نکرده است، از جمله تساوی دو خط قائم، توازی خانه ای که ریسمان از آن رها می شود [با چوب بالای ابزار] و نیز قائم بودن شاقول بر قاعده مثلث [در صحیفه شبهه]. ریسمان هم لازم است در مرکز نصف شده باشد. او تأکید می کند که محقق شدن این شرایط به منظور برقراری شرایط تشابه مثلث ها ضروری است، به ویژه در زمین های شیب دار. مثلث مورد استفاده در میزان الشبهیه باید متساوی الساقین باشد. متساوی الساقین بودن مثلث «علت موجه» است و مراعات این معنی در همه صناعات واجب است. اینکه در هر حال در همه دفعات توزین، دو چوب باید بر سطح زمین قائم باشند و شرایط و تشابه یکسان را حفظ کنند مهم است. به نظر این کشته مراعات تشابه در موضعی که دو چوب به سطح زمین عمود باشند آسان تر از سایر اوضاع است. چون به این ترتیب شاقول به طور طبیعی بر خط قائم افق پایین می آید و این تشابه امری طبیعی و غیرساختگی است.



تصویر ۷. عدة مسائل لابن کشته (آستان قدس رضوی، ۴۰)

منابع

- ابن کشنه قمی، عدة مسائل لابن کشنه فی الرد علی مواضع من کتاب الکافی للکرجی. نسخه خطی شماره ۵۵۹۳/۴، کتابخانه آستان قدس رضوی.
- ابن کشنه قمی، فی إبانة الخطین اللذین یقربان ابدأً ولا یلتقیان. نسخه خطی شماره ۵۵۲۱/۴ کتابخانه آستان قدس رضوی.
- همان، نسخه خطی شماره OR.14، کتابخانه لایدن.
- احمد بن محمد بن کثیر فرغانی، جوامع علم النجوم و أصول الحركات السماویة، قسم ۱، نشر و ترجمة لاتینیة یعقوب جولویس ۱۴۱۸-۱۹۹۷ م. معهد تاریخ العلوم العربی والاسلامیة جامعة فرانکفورت، آلمان.
- احمد بن ثبات همامی واسطی، غنیة الحُساب فی علم الحساب. نسخه خطی شماره ۶۴۲۸ کتابخانه مجلس شورای اسلامی.
- همان، نسخه خطی شماره ۲۷۲۸، کتابخانه ایاصوفیه.
- خرقی، عبدالجبار. (۱۳۹۹ ش). منتهی الإدراک فی تقاسیم الأفلاک. تصحیح، ترجمه و پژوهش حنیف قلندری. تهران: میراث مکتوب.
- رحیمی، غلامحسین. (۱۳۸۷ ش). «ترازهای کرجی». تاریخ علم، شماره ۷. ص ۵۵-۷۴.
- فخر رازی. (۱۴۰۷ ق/۱۹۸۷ م). المطالب العالیة من العلم الإلهی. بیروت: دار الكتاب العربی.
- شفاق بغدادی. شرح الکافی فی الحساب کرجی. نسخه خطی شماره A3135 کتابخانه طویقای سرای استانبول.
- شهرزوری. شرح الکافی فی الحساب کرجی. نسخه خطی شماره ۸۰۱ کتابخانه ینی جامع.
- قربانی، ابوالقاسم. (۱۳۷۵ ش). زندگی نامه ریاضی دانان دوره اسلامی. تهران: مرکز نشر دانشگاهی.
- قلندری، حنیف. «مقاله سوم از زیج جامع کوشیار و جوامع علم النجوم فرغانی: مقایسه میان دو متن متقدم هیئت و جایگاه آنها در میان رساله های هیئت». تاریخ علم، دوره ۱۲، شماره ۱، بهار و تابستان، ۱۳۹۳، ص ۳۹-۷۲.
- قلندری، حنیف. مقدمه بر «منتهی الإدراک...». نک: همین منابع، خرقی.
- کرجی. (۱۴۰۶ ق). الکافی فی الحساب. تصحیح و تحقیق سامی شلهوب. حلب: معهد التراث العلمی العربی.
- کرجی. الکافی فی الحساب. نسخه خطی شماره ۳۴۳۹/۲۱ کتابخانه فاتح.
- کوشیار گیلانی. زیج جامع. نسخه خطی شماره ۱۰۵۴ (or. 8) کتابخانه لایدن.
- همان، نسخه خطی شماره ۷۸۴/۳ کتابخانه ینی جامع استانبول.
- مجموعه خطی شماره ۲۴۶۸ کتابخانه ملی پاریس.
- Amini H. and Reza Kiani Movahhed. (2022). "Anbūba: A Medieval Instrument for Measuring Relative Ground level." *Tarikh-e Elm*, 19(2). pp. 85-103.

- Djebbar, A. (2000). *La place et le rôle de l'imagination dans les activités mathématiques de la tradition arabe médiévale*, Actes du Colloque International sur «Imagination and Sciences» (Rabat, 1998), A. Benmaïssa (édit.), Rabat, Publications de la Faculté des Lettres et des Sciences Humaines, pp. 153-176.
- Heath. T. I. (1897). *The works of Archimedes*. Cambridge.
- Sezgin, F. (Leiden). *Geschichte Des Arabischen schrifttums*. Vol. 5. Leiden.
- Ptolemy. (1984). *Almagest*. Translated and annotated by G. J. Toomer. Princeton University Press.
- Van Brummelen, G. (2009). *The mathematics of the heavens and the earth, the early history of trigonometry*. Princeton University press.

پیوست

تصحیح رساله عدة مسائل لابن كشة في الرد على مواضع من كتاب الكافي للكرجي

- اعداد «ثلاثة»، «ثمانية» و «ثلاثين» در نسخه، در تصحیح به صورت «ثلاثة»، «ثمانية» و «ثلاثين» نوشته شده است؛
- نسخه شمارنده صفحات در پایین صفحه دارد، در تصحیح نیز همان شمارهها را بعد از آخرین کلمه هر صفحه در میان دو علامت // نوشته ایم. مثلاً آنجا که عدد ٣٩/ نوشته شده است یعنی از ابتدای نسخه تا آنجا صفحه ٣٩ است.
- کلماتی را که میان دو قلاب [] نوشته شده اند مصححان افزوده اند.
- نسخه شکل ندارد و شکل ها بر اساس توضیحات کشیده شده اند و به تصحیح افزوده شده اند.

[١] قال أبوبكر الحاسب: «فإذا أردت بعد معرفتك هذه الأوتار أن تخرج قوساً من وتر، فإن كان الوتر واحداً من الأوتار ...» إلى آخره.^١

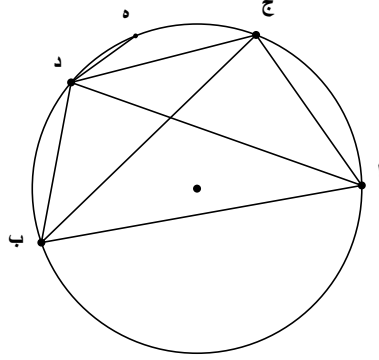
قال محمد بن كشة: هذا العمل لا يوجب التحقيق ولا التدقيق في التقريب. وذلك إننا نفرض قوس **اجدب** و أوتار **اد، اج، بد، بج، جد**. فقد علمت في كتب الهيئة إنه إذا ضرب وتر **اج** في وتر **دب** وأسقط المبلغ من سطح وتر **اد** في وتر **بج** وقسم الباقي على وتر **اب** خرج من القسمة وتر **جد**، فوتر **جد** هو الخارج من القسمة يوجب عمل أبي بكر.

وقد زاد على الخارج من القسمة ثلث عشره ثم حكم بعد ذلك بأن المبلغ يكون قوس **جد**. فيكون نسبة قوس **جد** إلى وتر **جد** كنسبة أحد وثلاثين إلى ثلاثين. ثم نفرض مكان قوس **جد** قوس **هد**، فتكون نسبة قوس **هد** إلى وتر **هد** كنسبة أحد و ثلاثين إلى ثلاثين أيضاً. فنسبة قوس **جد** إلى وتر **جد** كنسبة قوس **هد** إلى وتر **هد**.^٢ وبالتبديل نسبة قوس **هد** إلى قوس **جد** كنسبة وتر **هد** إلى وتر **جد**. وقد تبين في كتب الهيئة خلاف هذا [شكل ١].

١. الكافي في الحساب، ١٤٣-١٤٤

٢. نسخه: د

وقد أثبتت هذه الأوتار هناك أشدّ تقريبًا. فهذا الطريق لا يوجب التحقيق ولا التدقيق / ٣٩ / في التقريب كما ذكرناه. لكن هذا الموضع يحتمل التقريب إلا [أن] يعترض عليه سبب هذا العمل وإنما ذكرنا هذا القدر لنسبة الحُساب و يتحققوا. أن هذا الطريق لا يقتضى التحقيق مطلقًا ولنورد ما في الباب الخامس من أبواب المساحة.



[شكل ١]

[٢] قال أبوبكر الكرجى: «ذوات أضلاع الكثيرة^١ فهي مثل المُخَمَّس والمُسَدَّس والمُسَبَّع ومساحت كل شكل يتساوى أضلاعه وزواياه أن تضرب نصف قطر أعظم دائرة يقع داخله في نصف محيط ...» الى آخره.^٢

قال محمد بن كشنه: قد زل المصير ههنا زلة عظيمة، إذ أخذ أمرًا جزئيًا،^٣ المتساوي الأضلاع الذي يقع فيها ويُفرض، واستعمله مكان أمر كلي. ونحن نُفرض لبيان ذلك خط **اب** في دائرة **ابج** ضلع المُثَمَّن المتساوي الأضلاع الذي يقع فيها. ونُفرض **اج** قطر الدائرة ونصل **بج** فيكون زاوية **ب** قائمة و **اجب** ربع قائمه و **جابه** ثلاثة أرباع قائمة. ونفصل من خط **بج** خط **بد** مثل خط **اب** ونصل **اد** فيكون كل واحدة من زاويتي **ادب**، **داب** نصف قائمة ويبقى زاوية **جاد** مثل زاوية **اجد**. فيكون خط **اد** مثل خط **دج**. فمربع **دج** مثل مربع **اد**. لكن مربع **اد** مثل مربعي **دب**، **اب**، لأنّ زاوية **جبا**^٤ من مثلث **ابج** قائمة. و مربع **دب**، **اب** ضعف مربع **دب**، لأنّهما متساويان، فمربع **دج** ضعف مربع **دب**. ولأنّ زاوية **ب** من مثلث **ابج** قائمة يكون مربع **اج** مثل مربعي **بجابه**، لكن مربع **اج** على الطريق الذي ذكره أبوبكر ستة أمثال مربع **اب** و ثمانية أضعافه. و مربع **اب** مثل

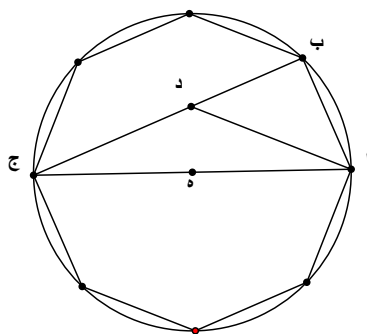
١. نسخه: الكبيرة

٢. الكافى فى الحساب، ١٤٥

٣. نسخه: حريا

٤. نسخه: جب

مربع دب فمربع اج، أعني مربعي دب، بج^۱ ستة أمثال جب و ثمانية أتساعه. و بالتفصيل يكون مربع بج أعني مربعي دب، دج و ضعف سطح دب في دج خمسة أمثال مربع دب و ثمانية أتساعه. و مربع دج ضعف مربع دب و ثمانية أتساعه. فسطح دب في دج، مثل مربع دب و أربعة أتساعه. فخط دج مثل خط دب وأربعة أتساعه فمربع دج أعظم من ضعف مربع دب. لكن قد حصل $\frac{40}{2}$ [ما] يكون ضعفًا له. فالطريقة التي ذكرها أبوبكر الحاسب لا يطرد في المثلث. والسالب الجزئي ناقض الموجب الكلي. لكن السالب الجزئي ههنا هي فالموجب الكل الذي حكم المصنف باطل. ولنشرع^۳ إلى إطراد هذا الطريق في المثلث والمربع والمُسَدَّس لأن أيضًا في هذا المعني شديد المناسبة بما نحن فيه [شكل ۲].



[شكل ۲]

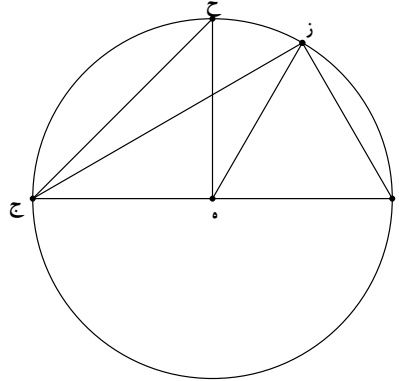
ولنخرج لذلك وتر السُدس من الدائرة و هو از.^۴ ليكون جز وتر التُّلث ونخرج من ه، وهو المركز، خط ه ح قائمًا على اج ونصل ح ج وهو وتر الربع. فلأن مربع اج أربعة أمثال مربع اه، ومربع اه مثل مربع از. يكون مربع اج أعني مربعي از، زج أربعة أمثال مربع اه. مربع اج مثل مربع جز ومثل ثلثه. ولأن مربع اج أربعة أمثال [مربع] جه فمربع جه نصف مربع ح ج. يكون مربع اج ضعف مربع ح ج [شكل ۳]

۱. نسخه: دبج.

۲. نسخه: در بالا کلمه ای نوشته شده که «الذی» یا «التی» خوانده می شود اما از نظر نحوی با جمله نمی خواند.

۳. نسخه: ولنشر

۴. + و نصل ح ج وهو وتر الربع



[شكل ٣]

ولأنك ضربت ثلاثة في ثلاثة وهي عدد أضلاع المثلث ونقصت من المبلغ ثلاثة وزدت على الباقي ستة كان المبلغ اثني عشر وهو مثل التسعة و مثل ثلثها. وقد بينا أن مربع القطر مثل مربع وتر الثلث و مثل ثلثه، لنسبة مربع القطر إلى مربع وتر الثلث كنسبة اثني عشر إلى التسعة. فتسع اثني عشر من مربع وتر الثلث هو مربع القطر. ولأن الأربعة في الأربعة إذا نقصت من المبلغ أربعة وهي عدد أضلاع المربع وزدت على الباقي ستة، كان المبلغ ثمانية عشر وهي ضعف التسعة. وقد بينا أن مربع القطر ضعف مربع وتر المربع فنسبة ثمانية عشر إلى التسعة كنسبة مربع القطر إلى مربع وتر المربع. فتسع ثمانية عشر من مربع وتر المربع هو مربع القطر.

ولأنك إذا ضربت ستة في ستة وهي عدد أضلاع المُسدس ونقصت من المبلغ عدد الأضلاع وزدت على الباقي ستة كان الحاصل أربعة أمثال التسعة. وقد بينا أن مربع القطر أربعة أمثال مربع وتر المُسدس. فنسبة الستة والثلاثين إلى التسعة كنسبة مربع القطر إلى مربع وتر المُسدس. فتسع الستة والثلاثون من مربع وتر المربع وهو مربع القطر. فقد أوضح سبب إطراد الطريق الذي ذكره أبوبكر - رحمه الله - في هذه الأشكال الثلاثة. وتبين البرهان الذي لا يحلج شك إنه طريق جزئي، جزئي لا يطرده في جميع هذه السطوح وإن كانت متساوية الأضلاع والزوايا. وإذا قد فرغنا من هذا فلنذكر ما في الباب السادس من أبواب المساحة.

[٣] قال أبوبكر الكرجي: «إذا أردت أن تمسح سطحاً»^٣ / ٤١ / كرة أجلى... قوله «المستقيم الذي يخرج من محيط القاعدة إلى أعلاه...»^٤.

١. نسخه: وانت

٢. نسخه: + غرفنا

٣. الكافي في الحساب، ١٤٧؛ نسخه: سطح

٤. الكافي في الحساب، ١٤٨

قال محمد بن كشته: الطريق الذي ينسبه إلى أرشميدس محقق بالبراهين الهندسية وقوله في مساحة بسيط الكرة أن ضرب [مساحة] أعظم دائرة يقع عليها في ربعها يصح في مثال واحد. وهو إذا فُرض قطر^١ الكرة جذر عشرين عددًا و أربعة أجزاء من أحد عشر جزءًا من واحد و ذلك إن هذا المقدار يصير قطرًا أعظم دائرة تقع على الكرة و كل دائرة قطرها هذا المقدار فإن مساحتها ستة عشر وسوا ضرب مساحة هذه الدائرة في أربعة أو في ربعها، لأن ربع ستة عشر. [إذا زاد القطر] علي هذا المقدار زادت مساحتها على الواجب. وإذا نقص القطر عن هذا المقدار نقصت المساحة عن الواجب بهذه الطريقة. وهذه الزيادة والنقصان لا يقيان عند حد محدود، بل يتزايد الزيادة وينقص النقصان إلى غير النهاية. ولأن بديهية النظر يحكم باستحالة هذا، قلت هذا الغلط إلى الناسخين ومما يؤكد هذا إنه غير موجود في جميع النسخ.

وظاهر لي قوله في مساحة بسيط المخروط لا يطرد في جميعها وقوله «والسطحان المتوازيان هما اللذان إذا أخرجنا من كلتي الجهتين لم يلتقيا»^٢ فيه خلل. إذ يمكن أي توحيد سطحان لهذه الصفة ولا يكونان متوازيان. ومما يتفرع على مساحة بسيط الكرة ويناسب ما نحن فيه، مما أغفله الكيا^٣ كوشيار - رحمه الله - في الباب العاشر من المقالة الثالثة من الزيج الجامع حيث قال: «ضرب القطر في قطعة من قوس دائرة عظيمة تقطع قطعة من بسيط الكرة بنصفين، مساحة بسيط القطعة من الكرة». ثم كرر^٤ هذه الزلة في هذا الباب أيضًا حيث حكّم بأن ضرب القطر في عرض المعمورة هو مساحة المعمورة.

و لقول^٥ الكياي، كما أن ضرب القطر في جميع محيط الدائرة العظيمة التي تقع على بسيط الكرة هو مساحة بسيط الكرة؛ وأن ضرب هذا القطر في نصف محيط هذه الدائرة هو نصف مساحة بسيط الكرة؛ وأن ضرب القطر أيضًا في ربع محيط هذه الدائرة هو ربع مساحة بسيط الكرة الذي عرضه تسعون جزءًا، لذلك ضرب هذا القطر في جميع أجزاء هذه الدائرة هو مساحة بسيط أجزاء الكرة التي عرضها تلك الأجزاء المضروب فيها. فتؤمّم لذلك أن هذا الحكم كلي، وليز^٦ ما ينخدع الإنسان بالأمثلة الجزئية ولتقيّد نسبتها أمرًا كليًا لكن قد انفقد^٧ / ٤٢ / إجماع ذوى التحقيق عجزًا واضطرارًا على العمل بذلك في الاستقرا^٨ [على] اثبات الحسية دون العقلية القطعية. ولنفرض محيط الأرض أربعة وعشرين ألف^٨ ميل، ولو فرضناه مقدارًا آخر كان، فيكون مساحة المعمورة بمقتضى حكم الكيا ٣٣٨١٢١٣١ ميلاً و ثمن ميل. ثم نزيد على مربع محيط الأرض ثلاثة أرباعه فما حصل نُقسمه

١. نسخه: قطره

٢. الكافي في الحساب، ١٤٨

٣. نسخه: الكيا

٤. نسخه: + ثم كرر

٥. نسخه: لقل

٦. نسخه: وليرا

٧. نسخه: الاستقرار

٨. نسخه: + الف

على اثنين وعشرين، فما خرج من القسمة فهو رُبع بسيط الأرض، نحفظه. ثم نأخذ وتر تمام المعمورة ونضربه في المحيط، فما حصل من الضرب نضرب مربعه في ثلثه ونصف. ونقسم المبلغ على ما حصل من ضرب مربع مائه و عشرين، أعنى القطر المفروض في كتب التنجيم، في اثنين وعشرين. فما خرج من القسمة نحفظه. من المحفوظ فيبقى ٤٢٠٤٤٧٨٢ ميلاً وثُلث ونصف عن ميل. وهو مساحة المعمورة. وهذا الطريق من لوازم الطريق المُحَقَّق الذى ذكّره أرشميدس. والتفاوت بين هذه المساحة وبين المساحة بطريقة الكيائى - رحمه - ٨٢٣٦٢٩ ميل وربع وسُدس من ميل. وقد سَبَقَتْ منا^١ رسالةٌ وحيدة أَوْضَحْنَا فيها وجه خطائه بطريق هندسي من غير احتياج فيه إلى امتحان مثال عددي.

[٤] و قال أبوبكر الكرجي: «إعلم أن المجسم الذي يحتاج إلى مساحته تنقسم إلى خمسة أقسام» إلى آخره ...

٢.

قال محمد بن كشنه: تتوهم سطحاً مستويًا و تتوهم في ذلك السطح دائرة و نُفرض خارج تلك الدائرة نقطة كيف ما أنفقت.^٣ و يخرج من تلك النقطة خطًا يكون عمودًا على ذلك السطح المتوهم. رأس هذا الخط رأس المخروط، قاعدته تلك الدائرة التي ذكرنا، فيكون^٤ مساحة هذا المخروط؛ و إن كان البُعد بين تلك النقطة المفروضة و بين الدائرة المتوهمه ألف فرسخ^٥ و إن كان ذلك البُعد أضعاف هذا المقدار أى أضعاف كانت. وقد صرح أبوبكر بأن عمودًا المخروط هو الخط الذي يصل بين أعلا و بين قاعدته، ثم قال إن مساحة القاعدة في ثُلث العمود هو مساحة المخروط. لكن النقطة المفروضة في السطح المتوهم خارجة عن قاعدة المخروط ولا يمكن أن نخرج من رأس هذا المخروط إلى قاعدته خطًا يكون مساويًا للخط الذى استخرجناه عمودًا على السطح المتوهم. فإذا العمود الذي يكون ثلثه في مساحة قاعدة المخروط مساويًا لمساحة المخروط ٤٣ / لا يصل بين رأس المخروط و بين قاعدته في جميع المخروطات، بل قد يقع خارجًا عنها لكن لأنه يقع على السطح الذي فيه قاعدة المخروط فلينحلّ قوله من وصف هذا العمود على تَوْسُع في العبارة أو اختصار فيها.

وأما قوله في مساحة جسم الكرة فضعيف جدًا. وذلك أنه بَيَّنُّ بالبراهين التي لا يحتملها شك أن نسبة جسم الكرة إلى مكعب قطرها كنسبة أحد عشر إلى أحد وعشرين. وعلى الطريق الأول الذى ذكره أبوبكر يلزم أن يكون نسبة مساحتها إلى مكعب قطرها كنسبة اثني عشر وستة أسباع وثلاثة أرباع سبع إلى أحد وعشرين. وعلى الطريق

١. نسخه: منار

٢. الكافي في الحساب: ١٤٨

٣. نسخه: من انقطب

٤. نسخه: + عمودًا على ذلك السطح المتوهم رأس هذا الخط.

٥. نسخه: + قل

٦. نسخه: عمودا

الذي ذكره ثانيًا يلزم أن يكون نسبة مساحتها إلى مكعب قطرها كنسبة ثلاثة عشر وثلث خمس إلى أحد وعشرين. فقد صار كل أحد عشر بالطريق الأول اثني عشر وستة أسباع وثلاثة أرباع سبع. وبالطريق الثاني صار كل أحد عشر عددًا ثلاثة عشر وثلث خمس. وبعد هذا فلينهني إلى الباب الذي يذكر فيه كيفية الوزن.

[٥] قال أبوبكر الكرجي: «إذا أردت أن تزن أرضًا لإنشاء نهر أو قناة» إلى آخره ...^١

قال ابن كشة: اشتراط واشتراط من أولى هذه الأعمال تساوى القائمتين وتوازي البيت الذي هو ينفذ الخيط لطول الحسنة وقيام خط الذي هو ينحدر الشاقول على الخط المخطوط على قاعدة مثلث الذي يذكرون أنه يجب أن يكون موازيًا للبيت المذكورة.^٢ وكون الميزان على منتصف الخيط كَنَش من المرسوم.

وليست أوجب بهذا القول وجوب عدم هذه الشرايط، بل أوجب عدم وجوبها. وهذا المعنى أعم من الأول وهو علة حصول المقصود. وإذا كان علة الشيء عامة فتخصصها من غير ضرورة خرق و غفلة و [إدراك] أنه لا شك أن من حكم بأن الزوايا الثلاث من كل مثلث متساوي الساقين من حيث هو لذلك فقط لا من حيث هو مثلث مطلق مساوية لقائمتين. فقد هي هذا المعنى عن المثلث الذي هو غير متساوي الساقين إذا عول أمرًا عظيمًا بسبب تخصيص عليه هذا التساوي إذا العلة الموجبة لهذا المعنى هو المثلث من حيث هو مثلث مطلق، لا من حيث هو مخصص لشيء آخر، و مخصوص العلة العامة من^٣ أمثال هذه المسألة غير فرضي.

وهذا المعنى كثيرًا ما يذهب على الناظرين في العلوم. ولكن مراعاته في كل صناعة^٤ / ٤٤ واجب بقدر القوة البشرية بل المهم تشابه قيام للقائمتين على سطح الأرض. وليست أقول إنه يجب في جميع دفعات الوزن تشابه واحد. بل في كل دفعتين متناكبتين مناظرتين تحت تشابه واحد وليس يجب من هاتين الدفعتين أيضًا أن تشابه قائم القائمتين بان يجوز ارتيجان (كذا) من الوضع، لكن يجب أن يكون كل واحد منهما من الدفعة الثانية حافظة لوضعها الخاص بها من الدفعة الأولى. ولأن القائمتين إذا كانتا موازيتين لخيط الشاقول في كل دفعة كان كل واحدة منهما قائمة على سطح الأفق متشابهة الأوضاع. وكان مراعاة التشابه من هذا الموضع أسهل من مراعاته في الأوضاع الأخرى من ساير الأوضاع. لأن هذا التشابه يحصل بسبب أمر طبيعي غير صناعي، أو ينحدر الشاقول على خط قائم على سطح الأفق من غير قصد قاصد، بل لو أجاز و أوضع^٥ آخر يتعلق بقصد القاصدين لاضطروا ضرورة في تحصيل ذلك الوضع إلى هذا الوضع أيضًا، إذ لا يمكن حفظ تشابه هذه الأوضاع إلا بواسطة الأفق ولا يمكن

١. الكافي في الحساب، ١٥٥

٢. نسخه: + و كون الميزان قاعدة المثلث الذي يذكرون انه يجب ان يكون موازيا للبيت المذكورة.

٣. نسخه: + عليه

٤. نسخه: درك

٥. نسخه: + مراعاته

٦. نسخه: + واجبة

٧. نسخه: اوضعا

تحصيل سطح الأفق إلا بواسطة فينحدر ينحدر على خط يكون قائمًا على ذلك السطح. فلهذا كان هذا الوضع أولى بلا اختيار^١ للعمل.

وقد عملنا في كيفية هذا الانحدار رسالة أوضحنا فيها خطأ أبي العباس النيريزي في مقالة له في عمل الآلات التي يعرف بها بعد الأشياء وأشرنا بعد ذلك إلى كيفية تحصيل الصواب في هذا المعنى. وقد أهمل أبوبكر أمرًا مهمًا عند الاستعمال بالوزن وهو أن يكون القائمة المتقدمة المبتدأ بها من العمل يكون عند الفراغ متأخره مختومًا عليها. وقد اشتبه القول في هذه المعاني من رسالة مفردة علمناها في الموازين.

[٦] ولأن مولانا أمرني تكلم على المواضع التي عزم الحاسب أن يبحر عنها. وتعرف وجه خطاها من حيث هو حاسب محقق. و تفرض عن المواضع التي ثبوت بيانها عنده من حيث هو فيلسوف مطلق. وقد أشرنا إلى هذه المواضع فلنحصل هذا منتخبي (?) مقصدنا.

ولنتختم القول حامدين لله تعالى و نصلي على سيدنا محمد وآله وصحبه أجمعين وسلّم تسليمًا كثيرًا. والله أعلم بالصواب وإليه المرجع والمآب. / ٤٥ /