

A Study Of Lagrange's Life And Works, With An Emphasis On His Book: Analytical Mechanics

Amir JarrahiDarban ¹ 

1. MS. Sharif University of Technology, E-mail: amir.jarrahi@alumni.ut.ac.ir

Article Info

Article type:

Review article

Article history:

Received: 22 February 2026

Revised: 12 May 2026

Accepted: 18 May 2025

Published online: 17 July 2026

Keywords:

Joseph-Louis Lagrange,
Analytical Mechanics, The
Principle of Virtual Work, The
Principle of the Least Action,
Variational Calculus

ABSTRACT

In this article, we will first present a biography of Joseph-Louis Lagrange and an account of his scientific activities, and then introduce his most important work, the book *Analytical Mechanics*. In addition to examining Lagrange's main work, some of his other works will also be briefly mentioned. Furthermore, we will address some of the scientific activities of scholars who preceded him or were his contemporaries, such as Newton, Wolff, Euler, d'Alembert, the Bernoulli brothers, Clairaut, Fontaine, Condorcet, and others.

Cite this article: JarrahiDarban, A. (2025). A Study Of Lagrange's Life And Works, With An Emphasis On His Book: Analytical Mechanics. *Journal for the History of Science*. 23 (1), 41-65. DOI: 10.22059/jihs.2026.411268.371878



© The Author(s).

Publisher: University of Tehran Press.

بررسی زندگی و آثار لاگرانژ، با تأکید بر کتاب «مکانیک تحلیلی» امیر جراحی دربان^۱

۱. کارشناسی ارشد دانشگاه صنعتی شریف، amir.jarrahi@alumni.ut.ac.ir

اطلاعات مقاله	چکیده
نوع مقاله: ترویجی	
تاریخ دریافت: ۱۴۰۴/۱۲/۰۴	در این مقاله، ابتدا تاریخچه زندگی و فعالیت‌های علمی ژوزف لویی لاگرانژ را بیان کرده و سپس به معرفی مهم‌ترین اثر او یعنی کتاب مکانیک تحلیلی خواهیم پرداخت. علاوه بر بررسی اثر اصلی لاگرانژ، برخی آثار دیگر او نیز به اختصار مورد اشاره قرار خواهند گرفت. همچنین، به برخی فعالیت‌های علمی دانشمندان ماقبل و یا هم‌اثر او مانند نیوتن، ولف، اویلر، دالامبر، برادران برنولی، کلوروت، فونتن، کندورسه و دیگران نیز پرداخته می‌شود.
تاریخ بازنگری: ۱۴۰۵/۰۲/۲۳	
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۵/۰۲/۲۸	
تاریخ انتشار: ۱۴۰۵/۰۴/۲۶	
کلیدواژه‌ها: ژوزف لویی لاگرانژ، مکانیک تحلیلی، اصل کار مجازی، اصل کمترین کنش، حساب تغییرات	

استناد: جراحی دربان، امیر (۱۴۰۵). بررسی زندگی و آثار لاگرانژ، با تأکید بر کتاب «مکانیک تحلیلی». تاریخ علم، ۲۴ (۱)، ۲۳۵-۲۴۵.

DOI: <http://doi.org/10.22059/jihs.2026.411268.371878>



ناشر: مؤسسه انتشارات دانشگاه تهران. © نویسندگان.

مقدمه

ژوزف لویی لاگرانژ یکی از برجسته‌ترین ریاضی‌فیزیک‌دانان در قرن هجدهم، یا شاید بتوان گفت در تاریخ ریاضی و فیزیک است. اهمیت کشفیات و نوآوری‌های او بر هیچ دانشمند و حتی دانشجوی دوره کارشناسی ریاضی، فیزیک، یا مکانیک پوشیده نیست. لاگرانژ با ارائه فرمول‌بندی‌ای نوین برای مکانیک کلاسیک نه تنها به گسترش این شاخه از علم کمی شایان نمود، بلکه دستاوردهای وی نقش پلی میان فیزیک کلاسیک و فیزیک کوانتوم را نیز ایفا کرد: به وجود آمدن نظریه‌های میدان‌های کلاسیک و میدان‌های کوانتومی مرهون فرمول‌بندی نوآورانه او هستند. با این حال، اهمیت نقش علمی لاگرانژ به «حلقه اتصال» بودن وی محدود نمی‌شود. برخی از کشفیات کلاسیک و مسائلی که او بررسی کرده از اهمیتی چنان بالا برخوردارند که هنوز و همچنان کاربرد دارند. شاید شناخته‌شده‌ترین این مسائل را بتوان «مساله n -جسمی» دانست. حالت خاصی از این مساله، یعنی مساله سه جسمی، منجر به کشف «نقاط لاگرانژ»^۱ گشت.

قسمت اول این مقاله به تاریخچه زندگی لاگرانژ، شامل اطلاعات فردی، ملاقات‌هایش با سایر دانشمندان، و زمان انتشار آثار علمی او می‌پردازد. در قسمت دوم به فضای علمی حاکم بر اواخر قرن هفدهم و اوایل قرن هجدهم میلادی، یعنی دوره‌ای که لاگرانژ در آن رشد و نمو پیدا کرد می‌پردازیم. این قسمت، به اختصار، اقدامات و کشفیات دانشمندانی را که پس از نیوتن اقدام به بسط مکانیک کلاسیک کرده و ریاضیات و فیزیک نوین برای بیان آن را به وجود آوردند بیان می‌دارد. در قسمت سوم، در زمینه‌ای تاریخی، برنامه لاگرانژ برای صورت‌بندی کلی مکانیک کلاسیک زمان خود را بیان خواهیم کرد. مهم‌ترین اثر لاگرانژ در این دوره رساله‌ای درباره اصل کمترین کنش می‌باشد. پس از این رساله، لاگرانژ اقدام به نگارش شاهکار خود، یعنی کتاب مکانیک تحلیلی^۲ می‌نماید. محتوای این کتاب در قسمت چهارم مورد بررسی قرار خواهد گرفت. قسمت پنجم نیز به نتیجه‌گیری مطالب گفته شده اختصاص خواهد یافت.

1. Lagrange Points

2. Mécanique Analytique

۱- زندگی‌نامه

جوژپه لودوویکو لاگرانجا^۱ (نام ایتالیایی) در تاریخ ۲۵ ژانویه ۱۷۳۶ در تورین متولد شد. پدرش، جوژپه فرانچسکو لودوویکو^۲، دکترای حقوق از دانشگاه تورین، خزانه‌دار انجمن املاک و استحکامات، و مادرش، ترزا گروس^۳، تنها دختر یک پزشک ثروتمند از کامبیانو (پیمونت) بود. در سال‌های اولیه زندگی‌اش به صورت خصوصی تحصیل و در سال ۱۷۵۰ در دانشگاه تورین در رشته حقوق ثبت‌نام کرد (Caparrini 2014a: 93). در این میان، شروع به مراجعه مکرر به کتابخانه دانشگاه برای ادامه مطالعات مورد علاقه‌اش در ریاضیات نموده و آثار کریستیان فون ولف^۴، نیوتن، ماریا گائتانا آگیزی^۵، ژان بتیست لرون دالامبر^۶ و لئونارد پاول اویلر^۷ را خواند. در ۱۷۵۴، کتاب روش یافتن^۸ اثر اویلر، که اولین تلاش برای بررسی سیستماتیک «مسائل وردشی»^۹ محسوب می‌شود را مطالعه کرد. سپس در نامه‌ای به او به روش‌های تحلیلی خود برای حل مسائل وردشی، که بعدها به عنوان «حساب وردشی»^{۱۰} شناخته شد، اشاره کرد. اویلر در پاسخ، روش او را به گرمی ستایش می‌کند (Caparrini 2014a: 93). در ۱۷۵۸، اولین تماس نامه‌نگاری خود با دالامبر را برقرار می‌کند. در ۱۷۶۳، برای اولین بار تورین را برای سفری در اروپا ترک می‌کند. قرار بود به لندن برسد، اما به دلیل بیماری مجبور شد سفر خود را قطع کند. اقامت او در پاریس سرشار از ملاقات‌ها و تجربیات است: او با ریاضیدانانی چون الکسی کلود کلورو^{۱۱}، دالامبر، الکسی فونتین

-
1. Giuseppe Lodovico Lagrangia
 2. Giuseppe Francesco Lodovico
 3. Teresa Gros
 4. Christian von Wolff
 5. Maria Gaetana Agnesi
 6. Jean-Baptiste le Rond d'Alembert
 7. Leonhard Paul Euler
 8. Methodus Inveniendi
 9. Variational Problems
 10. Calculus of Varitions
 11. Alexis Claude Clairaut

دِ پرتن^۱ و مارکی دو کندورسه^۲ ملاقات می‌کند. سال بعد، به خاطر «تحقیقات در مورد حرکت موازنه‌ای ماه»^۳ (منتشر شده در ۱۷۷۷) جایزه آکادمی علوم پاریس به او اهدا شد. در طول دوران کاری خود، لاگرانژ پنج بار این جایزه را برنده شد (Caparrini, 2014a: 94). در ۱۷۶۶ در مقاله «تحقیقات در مورد قمرهای مشتری که باعث جذب متقابل می‌شوند»^۴، او «مساله n-جسمی» را بررسی می‌کند. همان سال، در برلین، اوایل سمت خود (مدیر کلاس ریاضیات آکادمی)^۵ را ترک کرد و به سن پترزبورگ بازگشت. دالامبر از این موقعیت استفاده کرد و لاگرانژ را به پادشاه پروس، فردریک دوم، توصیه کرد. لاگرانژ تورین را به مقصد برلین ترک کرد و از پاریس (جایی که دوباره با دالامبر ملاقات کرد)، لندن و هامبورگ عبور کرد و در آکادمی علوم برلین به عنوان مدیر کلاس ریاضیات منصوب شد. در ۱۷۶۷ با دختر عمویش، ویتوریا کونتی^۶ (۱۷۴۷-۱۷۸۳) ازدواج کرد. در ۱۷۷۰ در مجموعه مقالات آکادمی برلین مقاله «تاملاتی در مورد حل معادلات جبری»^۷ را منتشر کرد که امروزه به عنوان آغاز مطالعات مدرن در مورد حل معادلات جبری می‌شود. ۱۷۸۳، سالی سیاه برای لاگرانژ بود: او شاهد مرگ همسرش، اوایلر، و دالامبر است. در ۱۷۸۶، پس از مرگ فردریک دوم (۱۷ اوت)، برخی تغییرات ایجاد شده در آکادمی، لاگرانژ را نسبت به آینده‌اش در برلین نگران کرد. اونوره-گابریل ریکتی (کنت میرابو)^۸، از چهره‌های تاثیرگذار در انقلاب فرانسه، در یک مأموریت دیپلماتیک به برلین، او را متقاعد کرد که به پاریس نقل مکان کند. لاگرانژ در ۱۸ مه ۱۷۸۷ برلین را به مقصد پاریس ترک کرد و در ۵ آوریل سال بعد، نسخه‌ای از کتاب مکانیک تحلیلی را که تازه در پاریس منتشر شده اما در دوره اقامتش در برلین نوشته شده بود، به آکادمی تقدیم نمود. در ۱۷۹۰ به همراه

1. Alexis Fontaine des Bertins

2. Marquis de Condorcet

3. Recherches sur la libration de la Lune

4. Recherches sur les inégalités des satellites de Jupiter causées par leur attraction mutuelle

5. Class of Mathematics of the Academy

6. Vittoria Conti

7. Réflexions sur la résolution algébrique des équations

8. Honoré-Gabriel Riqueti, Count of Mirabeau

لاپلاس، ژان-شارل دو بوردا^۱، کندورسه و ماتیو تیله^۲، به عضویت «کمیسیون اوزان و مقادیر»^۳ گمارده شد. در ۱۷۹۲ با رنه-فرانسوا-آدلاید لو مونیه^۴ (۱۷۶۷-۱۸۳۳)، دختر پی-یر شارل^۵ ستاره‌شناس ازدواج کرد. در ۱۷۹۴، به همراه کلود لویی برتوله^۶، به عنوان عضوی از «کمیسیون آموزش عمومی»^۷، و سپس به سمت استاد «کالج نرمال»^۸ منصوب می‌شود. سال بعد، کتاب پنج درس از مدرسه نرمال سوم^۹ را در مورد مسائل ریاضیات مقدماتی منتشر کرد. به همراه لاپلاس، به عضویت دفتر «طول‌های جغرافیایی»^{۱۰} (جایگزین رصدخانه تعطیل‌شده) منصوب شد و سپس به عنوان رئیس کلاس «علوم ریاضی و فیزیکی مؤسسه ملی علوم و هنر»^{۱۱} (جایگزین «آکادمی علوم»^{۱۲} سابق) انتخاب شد. در ۱۷۹۷ کتاب نظریه توابع تحلیلی^{۱۳} را منتشر کرد که در آن دیدگاه خود در مورد مبانی حساب دیفرانسیل و انتگرال بی‌نهایت کوچک‌ها را بیان کرده‌بود. در ۱۷۹۸ رساله «راه حل معادلات عددی همه درجه‌ها»^{۱۴}، و در سال ۱۸۰۱ کتاب درس‌هایی درباره محاسبه توابع^{۱۵}، که مکمل نظریه توابع تحلیلی^{۱۶} است، را منتشر کرد. در ۱۸۰۳ به همراه برتوله، لاپلاس و گاسپار مونژ^{۱۷}، به عضویت «لژیون افتخار»^{۱۸} منصوب شد و در ۱۸۰۴ به مقام لژیون ارشد

1. Jean-Charles de Borda
2. Mathieu Tillet
3. Commission on Weights and Measures
4. Renée-Françoise-Adélaïde Le Monnier
5. Pierre Charles
6. Claude Louis Berthollet
7. Commission for Public Education
8. École Normale
9. Cinq leçons données à l'Ecole normale del'an III
10. Bureau des longitudes
11. Physical Sciences of the National Institute of Sciences and Arts
12. Academy of Sciences
13. Théorie des fonctions analytiques
14. De la résolution des équations numériques de tous les degrés
15. Leçons sur le calcul des fonctions
16. Théorie des fonctions analytiques
17. Gaspard Monge
18. Legion of Honor

ترفع درجه یافت. در ۱۸۱۱ جلد اول از ویرایش دوم مکانیک تحلیلی را منتشر کرد. در ۳ آوریل ۱۸۱۳ به او نشان «امپراتوری اتحاد»^۱ اعطا شد. ۸ آوریل، مونژ، برنار ژرمن دو لاسه‌پد^۲ (رئیس سنا) و ژان-آنتوان-کلود شاپتال^۳ به دیدار او رفتند و آخرین تأملات او را شنیدند (Caparrini 2014a: 96). ۱۰ آوریل در خانه‌اش در پاریس، در خیابان فوبورگ سنت اونوره، درگذشت و در پانتئون به خاک سپرده شد. در ۱۸۱۵ جلد دوم مکانیک تحلیلی پس از مرگ او منتشر شد.

۲- مکانیک پس از نیوتن

درک نقش کتاب مکانیک تحلیلی تنها در سایه توجه به کتاب اصول ریاضی فلسفه طبیعی^۴، یا به اختصار، اصول، نیوتن امکان‌پذیر است. باور غالب آن است که نیوتن بخش بزرگی از مکانیک کلاسیک را کشف کرد و تنها وظیفه جانشینانش توسعه جنبه‌های صوری بود. با این حال، در واقعیت، اوضاع متفاوت بود. در اصول، بسیاری از مسائل مهم حرکت یک نقطه تحت نیروی مرکزی با روش‌های نیمه‌هندسی حل شده‌اند، اما هیچ چیز نزدیک به سیستم‌های مقید وجود ندارد. مکانیک سیالات در آنجا به شکلی ابتدایی مطرح شده، اجسام صلب تقریباً کاملاً غایب‌اند و سیستم‌های ارتعاشی تنها به‌طور گذرا ذکر شده‌اند. برای توسعه این نظریه‌ها، ریاضیات جدید لازم بود، اما مهم‌تر از آن نیاز به اصول فیزیکی تازه وجود داشت (Caparrini 2014b: 47).

پس از انتشار اصول، مسأله اصلی ایجاد مکانیک سیستم‌ها به صورت تحلیلی توسط سه نسل از ریاضی-فیزیک‌دانان برجسته مورد بررسی قرار گرفت.

1. Imperial Order of the Reunion
2. Bernard Germain de Lacépède
3. Jean-Antoine-Claude Chaptal
4. Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica

نسل اول هم‌عصران نیوتن (بین سال‌های ۱۶۹۰ تا ۱۷۱۰) از جمله پی‌یر واریگنون^۱ و یوهان برنولی^۲ بسیاری از نتایج اصول را به نمادگذاری لایبنیتزی ترجمه کردند. ژاکوب هرمان^۳ نیز در ۱۷۱۶ قانون دوم نیوتن را با فرمول $f = m \, dv/dt$ بیان کرد. حل مسألهٔ زنجیر آویزان توسط برنولی در ۱۶۹۱ و تحلیل برادرش ژاکوب^۴ از تغییر شکل الاستیک تیر ثابت در دیوار در ۱۶۹۴، آغازگر مکانیک پیوسته بود.

نسل دوم که اندکی پیش از ۱۷۳۰ وارد صحنه شد، شامل دانیل برنولی^۵، لئونارد اویلر، الکسی کلرو و ژان لرون دالامبر بودند. همهٔ آن‌ها در اوایل قرن متولد شده، در نوجوانی حساب لایبنیتزی را به‌طور کامل آموخته، پیش از هجده سالگی اصول را فرا گرفته، و مستقیم یا غیرمستقیم، همه شاگردان یوهان برنولی بودند. از جمله کشفیات بسیار آن‌ها می‌توان به دینامیک اجسام صلب، نظریهٔ سیالات و چند فصل بنیادی در الاستیسیتهٔ خطی اشاره کرد. فیزیک نوین قضایای بقا، مفهوم پتانسیل، اصول استاتیک و دینامیک برای سیستم‌ها، و نظریهٔ اختلال در اخترشناسی را به آن‌ها مدیون است (Caparrini 2014b: 48).

حدود سال ۱۷۶۰، مکانیک شروع کرد به شبیه شدن به آنچه امروز در دانشگاه‌ها تدریس می‌شود. مکانیک آن دوره هنوز مجموعه‌ای از نظریه‌های جداگانه بود. نه یک صورت‌بندی کلی وجود داشت و نه ارتباطی روشن میان اصول مختلف. در همین نقطه بود که چهرهٔ برجستهٔ نسل سوم جانشینان نیوتن وارد صحنه شد: لاگرانژ. او حدود ۳۰ سال جوان‌تر از اویلر و دالامبر بود. تا ۱۸ سالگی، او همهٔ ریاضیات و مکانیک تولیدشده در دهه‌های پیشین را به‌طور کامل فرا گرفت. او دانش عمیقی از نظریهٔ تازهٔ معادلات دیفرانسیل جزئی داشت که کلید ورود به مکانیک پیوسته بود. مجهز به این ابزارها، لاگرانژ خیلی زود هدف خود را تعیین کرد: یکپارچه‌سازی همهٔ مکانیک شناخته‌شدهٔ زمان خود (Caparrini 2014b: 48).

1. Pierre Varignon

2. Johann Bernoulli

3. Jacob Hermann

4. Jacob (Bernoulli)

5. Daniel Bernoulli

۳- برنامه لاگرانژ برای صورت‌بندی مکانیک

لاگرانژ در نخستین نامه‌اش به اوایلر (۴ ژوئیه ۱۷۵۴، زمانی که تنها ۱۸ سال داشت) به مطالعاتش درباره بنیان‌های مکانیک اشاره و از عبارت «برخی مشاهدات درباره ماکسیمم و مینیمم‌هایی که در کنش‌های طبیعت یافت می‌شوند» استفاده کرده بود. این اشاره‌ای بود به اصل کمترین کنش که توسط پی‌یر-لویی موورو دو موپرتویی^۱ و اوایلر در ۱۷۴۴ مطرح شده بود (Caparrini 2014b: 48). در نسخه موپرتویی، اصل کمترین کنش می‌گفت حرکت یک سیستم از اجسام تحت نیروهای داده‌شده به گونه‌ای است که حاصل ضرب سرعت در مسافت طی شده را کمینه کند. اوایلر در ضمیمه^۲ کتابش درباره مسائل تغییرات، «روش‌های یافتن»، با سبکی کاملاً متفاوت به مساله پرداخت. او نشان داد که برای یک نقطه مادی تحت نیروهای مرکزی، انتگرال

$$\int_P^Q v \, ds$$

(که در آن P نقطه آغاز، Q نقطه پایان و ds دیفرانسیل طول مسیر است) در مسیر واقعی حرکت کمینه می‌شود. این نتیجه قابل توجه بود، اما به هیچ‌وجه پایه کافی برای دینامیک نبود. اوایلر در ۱۷۴۸ نظر داد که هنوز «بسیار دوریم» از یافتن کمیتی که باید برای هر سیستم مکانیکی کمینه شود. مساله‌ای که اوایلر آن را دشوارترین می‌دانست، تقریباً به‌طور طبیعی توسط لاگرانژ حل شد، آن هم به‌دنبال کشف حساب تغییرات. نخستین پیش‌نویس الگوریتم جدید در دومین نامه‌اش به اوایلر (۱۲ اوت ۱۷۵۵) ظاهر شد؛ اوایلر بلافاصله در ۶ سپتامبر پاسخ داد و این کشف مهم را ستود. بحث سپس به مکانیک کشیده شد. نامه بعدی لاگرانژ (۲۰ نوامبر ۱۷۵۵) شامل حل تحلیلی مساله یافتن منحنی سریع‌ترین نزول یک نقطه مادی در صفحه عمودی از نقطه‌ای ثابت تا یک منحنی داده‌شده بود. در آغاز ۱۷۵۶، لاگرانژ رساله‌ای درباره اصل کمترین کنش^۳ را برای انتشار در آکادمی علوم برلین فرستاد. در آن زمان او معتقد بود این اصل «باید کلید همه مسائل، چه استاتیکی و چه دینامیکی» باشد (Caparrini 2014b: 48). بنابراین تنها یک سال پس

1. Pierre-Louis Moreau de Maupertuis

2. On elastic curves

3. Memoir on the principle of least action

از کشف حساب تغییرات، هدفش این بود که کل مکانیک را از اصل کمترین کنش استخراج کند. از پایان ۱۷۵۵ تا حدود ۱۷۶۰، لاگرانژ عمدتاً خود را وقف مکانیک کرد. رساله‌های آن دوره‌اش درباره اصل کمترین کنش، انتشار امواج، ارتعاش رشته‌ها و حل معادلات دیفرانسیل جزئی حرکت سیالات بود.

۴- محتوای کتاب مکانیک تحلیلی چیست؟

هر توصیفی از کتاب مکانیک تحلیلی معمولاً به جمله‌ای از مقدمه اشاره می‌کند که می‌گوید: «در این اثر هیچ شکلی یافت نخواهد شد» (8: Boissonnade and Vagliente 1997). دقیق‌تر آن‌که، در کل آثار لاگرانژ تقریباً هیچ شکل هندسی وجود ندارد. حتی اوایل، که در آن زمان پیر و تقریباً نابینا بود، اعتراف کرد که نمی‌تواند برخی از فرمول‌های لاگرانژ درباره حرکت اجسام صلب را به‌طور کامل درک کند (Caparrini 2014b: 51).

استفاده از روش‌های تحلیلی به جای روش‌های هندسی سراسر فیزیک ریاضی قرن هجدهم را فرا گرفته بود. اما لاگرانژ فراتر از انتخاب یک زبان رفت: مکانیک تحلیلی تلاشی بود برای فروکاستن مکانیک به شاخه‌ای از تحلیل ریاضی. او همه ساختار خود را بر یک فرمول واحد بنا کرد؛ فرمولی که قرار بود کلی‌ترین رابطه میان نیروها، جرم‌ها و حرکات در حضور قیود باشد و توسعه آن، بسته به هر مساله، معادلات دیفرانسیل لازم را برای حل آن مساله فراهم کند. به نظر لاگرانژ، مکانیک عالی^۱ چیزی نبود جز مجموعه‌ای از تبدیل‌های این فرمول بنیادی با استفاده از حساب دیفرانسیل صوری، یا به عبارتی، فروکاستن آن به نوعی جبر پیشرفته (Caparrini 2014b: 51). فرمول بنیادی لاگرانژ همان فرمولی است که اصل کار مجازی^۲ را بیان می‌کند و در بخش نخست کتاب به عنوان پایه استاتیک مطرح شده است. وقتی اصل دالامبر به آن افزوده شود، دینامیک به دست می‌آید که در بخش دوم توسعه یافته است. اصل کار مجازی قدمتی کهن دارد و بر مشاهده این واقعیت استوار است که در وینچ‌ها^۳، اهرم‌ها و قرقره‌ها آنچه در مسافت از دست می‌رود در نیرو جبران می‌شود. با اصطلاحات مدرن، این اصل بیان می‌کند که

1. Higher mechanics

2. The principle of virtual work

3. Winch

برای یک سیستم از اجسام مقید بدون اصطکاک، کار کل نیروهای قیدی در هر جابه‌جایی سازگار با قیود برابر صفر است. در قالب فرمول:

$$F_1 \delta q_1 + F_2 \delta q_2 + F_3 \delta q_3 + \dots = 0$$

که در آن $F_1, F_2, F_3, \dots$ نیروهای وارد بر نقاط سیستم و $\delta q_1, \delta q_2, \delta q_3, \dots$ مؤلفه‌های جابه‌جایی‌های مجازی در راستای نیروها هستند (Goldstein et al. 2014: 17). در صفحات نخست کتاب، لاگرانژ نوعی اثبات برای اصل کار مجازی ارائه می‌دهد که اساساً بر فرض اعتبار شهودی اصل برای دو نقطه استوار است. پس از تثبیت اصل کلی، لاگرانژ به اثبات نتایج بنیادی مکانیک سیستم‌ها می‌پردازد. او به ترتیب قانون دوم نیوتن برای نقطه آزاد، بقای اندازه حرکت، بقای گشتاور اندازه حرکت، بقای انرژی و اصل کمترین کنش را به دست می‌آورد. او نشان می‌دهد که بقای اندازه حرکت در فرض امکان انتقال آزاد سیستم در یک جهت خاص برقرار است؛ و بقای گشتاور اندازه حرکت در فرض امکان چرخش آزاد سیستم حول یک محور خاص (Caparrini 2002: 162). این نخستین اشاره مبهم به این ایده است که تقارن‌های سیستم به قوانین پایستگی منجر می‌شوند^۱؛ ایده‌ای که در نهایت در قضیه نوتر^۲ (۱۹۱۸) به اوج رسید.

۵- نتیجه‌گیری

کتاب مکانیک تحلیلی لاگرانژ نقطه اوج مکانیک قرن هجدهم بود. این اثر نه تنها همه نتایج پراکنده پیشینیان را یکپارچه کرد، بلکه رویکردی کاملاً نوین به مکانیک ارائه داد: فروکاستن آن به شاخه‌ای از تحلیل ریاضی. لاگرانژ با کنار گذاشتن هندسه تصویری و تکیه بر فرمول‌های عمومی و حساب تغییرات، مکانیک را به زبانی صوری و تحلیلی بازنویسی کرد. این کتاب نشان داد که اصولی چون کار مجازی و اصل دالامبر می‌توانند بنیان همه مکانیک باشند و از آن‌ها می‌توان قوانین بقا، معادلات حرکت و حتی اصل کمترین کنش را استخراج کرد (Hanc and Taylor 2004: 518). به همین دلیل، مکانیک

1. Conservation laws

2. Noether's theorem

تحلیلی نه فقط یک کتاب درسی، بلکه یک نقطه عطف در تاریخ علم بود؛ متنی که مسیر مکانیک نظری را برای قرن‌های بعدی تعیین کرد.

با این وجود، خود لاگرانژ پس از انتشار کتاب دچار نوعی افسردگی و بی‌علاقگی به ریاضیات شد و نتوانست از موفقیت عظیم اثرش لذت ببرد (Caparrini 2014b: 51). اما جامعه علمی به سرعت ارزش آن را دریافت و این کتاب به‌عنوان یکی از شاهکارهای تاریخ ریاضیات و فیزیک شناخته شد.

References

- Capparrini, Sandro (2002). The Discovery of the Vector Representation of Moments and Angular Velocity. *Arch Hist Exact Sci* 56:151–181. <https://doi.org/10.1007/s004070200001>.
- Capparrini, Sandro (2014a). Joseph-Louis Lagrange: Essential Timeline. *Lett Mat Int* 2:93-96. <https://doi.org/10.1007/s40329-014-0046-0>.
- Capparrini, Sandro (2014b). The History of Mécanique Analytique. *Lett Mat Int* 2:47-54. <https://doi.org/10.1007/s40329-014-0043-3>.
- Goldstein, Herbert, Charles P. Poole, and John L. Safko. *Classical Mechanics*. Third edition, Pearson new international edition. Harlow, Essex, England: Pearson, 2014.
- Hanc, Josef; Taylor, Edwin F. (2004). From Conservation of Energy to the Principle of Least Action: A Story Line. *American Journal of Physics* 72(2):514-521. <https://doi.org/10.1119/1.1645282>.

Boissonnade, Auguste; Vagliente, Victor N. (1997). *Analytical Mechanics. Boston Studies in Philosophy of Science, Volume 191 – An English Translation of Joseph L. Lagrange's Mecanique Analytique (1815)*. Springer Dordrecht. <https://doi.org/10.1007/978-94-015-8903-1>.