مجلّهٔ *تاریخ علم*، شماره دوم، پاییز ۸۳، ص۱۱۹ـ۱۳۵

سیر هندسه اقلیدسی از اقلیدس تا شیخ الرئیس بوعلی سینا

عبدالله انوار[۱]

چکیده

کتاب اصول اقلیدس[۲] با دو ترجمه، معروف به‌هارونی و مأمونی، مشتمل بر سیزده مقاله در دورهٔ نهضت ترجمه وارد فرهنگ اسلامی شد؛ اما هندسهٔ موجود در منابع اسلامی، دو مقالهٔ دیگر از ایسقلاوس[۳] را نیز دربردارد. بوعلی نیز در نگارش هندسهٔ شفا با اصل قرار دادن همین پانزده مقاله، به ارائهٔ استدلال های خویش پرداخته است.

در این مقاله، برای آشنایی با نحوهٔ استدلال بوعلی سینا، قضیه تقسیم خط به نسبت ذات وسط و طرفین عرضه و تبیین می‌شود.

مقدمه

اقلیدس در حدود ۳۰۰ ق. م کتاب هندسهٔ خود را پرداخت و در حوزهٔ اسکندریه عرضه نمود (*تاریخ تمدن ویل دورانت*، ج ۲، ص ۷۰۱). این کتاب که به *اصول*[۴] موسوم گشته، یکی از کاربردهای منطق در کمّ متصل قارّالذّات است و بزمان عرضه شدن چندان در جامعه علمی آن روز مؤثر افتاد که فرمانروایی چون بطلمیوس اوّل (حکـ ۳۰۵ـ۲۸۵ ق م)، حاکم مقدونی مصر، را به شاگردی به نزد اقلیدس کشید و او برای آموختن این علم از اقلیدس خواست تا راهی شاهانه فراروی او نهد؛[۵] اما از اقلیدس پاسخی عالمانه شنید: «در این جا راه شاهانه وجود ندارد».[۶] (*دائرة المعارف بزرگ اسلامی*، ج ۹،

---

۱. پژوهشگر تاریخ علم و فلسفه.

2. Euclid
3. Hypsicles
4. Principles
5. Show me a royal way
6. There is no royal way

ص ۶۶۹). یعنی که شاه و گدا باید در این جا برابر نشینند و هندسه فراگیرند.

ابن القفطی می‌گوید: کتاب اقلیدس در یونانی معروف به ارکان و در رومی به اسطقسات (استقصات) و نزد مسلمانان *اصول* نامیده می‌شود (*اخبار الحکماء*، ص۶۲)، و ابن ندیم اقلیدس را صاحب «جومطریا»[1] معرفی می‌کند و آن را با نام «اسطروشیا» نیز یاد می‌کند (*الفهرست*، ص ۳۲۵).

اقلیدس این کتاب را بر پنج «اصل موضوع» و به قول خود او بر پنج «پوستولا»[2] نهاده است، به شرح زیر:

۱ ـ بین دو نقطه، تنها یک خط مستقیم می توان رسم کرد.[3]

۲ ـ خط مستقیم را می‌توان تا بی‌نهایت از دو سو امتداد داد.

۳ ـ زوایای قائمه با هم برابرند.

۴ ـ همواره می‌توان دایره‌ای با هر مرکز و هر شعاع در هر نقطه‌ای از صفحه رسم کرد.

---

1. Geometrie

۲. واژه پوستولا (postulat/Un postulat) برگرفته از واژه‌ای یونانی به معنی «تقاضا» و «درخواست» است و اقلیدس با این واژه از خوانندهٔ کتاب خود تقاضا می‌کند که پیش از ورود به‌این علم، بدون درخواست دلیل این پنج اصل را بپذیرد. این پذیرش بی‌دلیل در واقع مُفهِم این معناست که می توان اصول دیگری هم فرض کرد و هندسهٔ دیگری ساخت؛ چنانکه از اواسط قرن نوزدهم میلادی چنین کردند و هندسه‌های دیگر ساختند.

۳. در توضیح خط مستقیم با استفاده از ویژگی‌های متعدد آن، تعاریف مختلف ارائه شده است:

الف) هرگاه قسمتی از آن بریده و بر قسمت دیگر آن نهاده شود، این قسمت بریده شده آن قسمت بر نهاده شده را نقطه به نقطه می‌پوشاند.

ب) هرگاه یک نقطه بر روی آن فرض شود و چشم دقیق بر روی این نقطه متمرکز گردد، این نقطه حاجب دیگر نقاط پس از خود می شود.

ج) خط مستقیم اقصر فاصله بین دو نقطه است و معروف است که‌این قول از ارشمیدس می باشد. در یک جُنگ خطی کتابخانه ملی ایران قولی از کاتبی آمده که به‌این تعریف ایراد گرفته مبنی بر این که بین دو نقطه بی نهایت خط می توان کشید و چون تحقق بالفعل بی نهایت غیر ممکن است، لذا ما نمی‌توانیم اندازه‌این خطوط بی نهایت را مشخص کنیم تا بعد بگوییم خط مستقیم اقصر فاصله است. این ایراد کاتبی به‌جاست، بدین شرط که بیان قضیه به وجه استدلالی و یقینی باشد، نه به صورت پوستولا و اصل موضوعی پذیرفتنی.

د) قولی از ارسطو در متافیزیک بدین مضمون وجود دارد: خط مستقیم آن خطی است که فقط یک حرکت بر آن، و در یک جهت و در یک زمان، واقع شود.

۵ ـ از هر نقطه واقع در خارج خط مستقیم در یک صفحه فقط یک خط می‌توان رسم کرد که اگر این دو خط تا بی نهایت روند یکدیگر را قطع نکنند، یعنی موازی‌اند.[۱]

باری این هندسه با این اصول در سیزده مقاله به فرهنگ اسلامی وارد شد، امّا با دو ترجمه مستقل: یکی از آن ترجمه‌ها به وسیله حَجّاج بن یوسف بن مطر بعمل آمد. و بنابر مقدمهٔ نسخهٔ خطی این ترجمه (موجود در لیدن هلند)، حَجّاج آن را در زمان خلافت هارون الرشید (۱۷۰-۱۹۳ ق) به امر یحیی بن خالد بن برمک ایرانی، از رومی به عربی برگرداند و تقدیم هارون کرد که‌این ترجمه در فرهنگ اسلامی به «نقل هارونی» مشهور است. حَجّاج بار دیگر در خلافت مأمون (۱۹۸-۲۱۸ ق) به ترجمهٔ قبلی خود رجوع و آن را تهذیب کرد و به نام نقل «نقل مأمونی» تقدیم مأمون نمود. قضیهٔ تساوی دو زاویهٔ خارجی دو ساق یک مثلث متساوی الساقین که در کتب هندسی اسلامی آمده و به «قضیهٔ مأمونیه» مشهور است، باید متعلق به‌این نقل دوم باشد. امّا ترجمهٔ دیگر هندسهٔ اقلیدس توسط اسحق بن حنین مترجم مشهور با ویراستاری ثابت بن قُرّه حَرّانی که او هم مترجم چیره دستی بود، به عمل آمد. بر طبق نسخهٔ کپنهاگن این ترجمه حاوی ده مقاله است و بر اساس آنچه در این نسخه آمده، اسحق و ثابت ده مقاله از سیزده مقالهٔ اقلیدس را ترجمه کردند و سه مقالهٔ آخر آن را فرو گذاردند؛ ولی نسخه‌های دیگر این مطلب را تکذیب می‌کنند و آنان را مترجم هر سیزده مقاله می‌دانند. با این حال، هندسهٔ موجود در فرهنگ اسلامی واجد دو مقالهٔ دیگر یعنی مقالات چهاردهم و پانزدهم نیز می‌باشد که عربان آن را از ایسقلاوس یا سقلاوس گرفته‌اند و مترجم آنها قسطابن لوقا بعلبکی است.

این که بوعلی سینا چگونه به هندسه دست یافت و در چه سنی آن را فرا گرفت،

۱. این اصل که به بیان دیگر عبارت از این است که مجموع زوایای داخلی یک مثلث مساوی دو قائمه است، از زمان اقلیدس مورد بحث هندسه دانان قرار گرفته و بر آن رفته‌اند که‌این اصل یک اصل موضوع نیست بلکه یک قضیه است و باید با تکیه بر چهار اصل فوق گشوده شود و برای استدلال آن کوشش ها کردند که بعدها معلوم شد استدلال آنان به نوعی مصادره به مطلوب است؛ از جمله‌این کوشش کنندگان دو ریاضیدان ایرانی خیام و خواجه نصیر طوسی هستند. سرانجام در اواسط قرن نوزدهم پذیرفته شد که‌این اصل همان اصل موضوع است و می‌توان خلاف آن را نیز فرض کرد و هندسه دیگری ساخت، چنان که کردند و ساختند (see: Poincaré).

مبتنی بر شرح حالی است که از او در دست داریم. می دانیم او در یک خاندان اسماعیلی پا به عرصهٔ حیات گذاشت، و از آن جا که اسماعیلیان بسیار شائق به مباحث استدلالی و عقلانی بودند، پدر و برادر بزرگ او در خردسالی مطالبی چند از هندسه به او آموختند؛ سپس عبدالله ناتلی طبری که دانشمندی اسماعیلی بود، معلمی او را بر عهده گرفت. وی که به بخارا آمده و در منزل پدر بوعلی سکونت کرده بود، اشکال پنجگانه از کتاب اقلیدس را به بوعلی آموخت. آن چه نباید ناگفته از آن گذشت مسألهٔ علاقه‌مندی اسماعیلیان به مباحث عقلی است. این نهضت بیش از هر نهضتی دیگر در پیشرفت علوم عقلی در فرهنگ اسلامی تأثیر داشته است و برجستگانی چون بابا افضل نوش‌آبادی کاشانی و خواجه نصیرالدین طوسی را تعلیم داده است. باری، شیخ الرئیس پس از عبدالله ناتلی خود فراگیری بقیه هندسه را بی‌معلم پی‌گرفت، و چون صاحب ذهنی وقاد و استدلالی بود، دنبالهٔ کتاب اقلیدس را با مطالعه شخصی فراگرفت. وی هنوز خردسال بود که تدریس هندسه را آغاز کرد و خود نیز «مختصری» در آن پرداخت که مع‌التأسف این نوشتهٔ او امروزه در دست نیست.

اما دربارهٔ نگارش هندسه شفا باید گفت: بنا بر اجماع آشنایان به افکار شیخ‌الرئیس، وی نه تنها هندسه، بلکه سه علم دیگر حکمت وسطی، یعنی فلسفهٔ ریاضی، و به قول متفلسفین اسلامی، علوم تعلیمی را خیلی قبل از زمان آغاز تألیف دانشنامهٔ شفا نگاشته بود و بعدها که کتب طبیعی و منطق و حکمت الهی *شفا* را پرداخت، این چهار کتاب را ضمیمهٔ کتاب *شفا* نمود. از آن‌جا که شیخ در عرضهٔ استدلال‌های هندسی نهایت اختصار را به کار می‌بندد - و خود نیز به‌این اختصار اشاره می‌کند - برای پژوهنده معلوم نیست که کدام ترجمهٔ عربی به دست او بوده است. باید یادآور شد که اشارهٔ بوعلی بر اختصار هندسهٔ *شفا* البته به این معنی نیست که فاقد برخی از مقالات پانزده گانه موجود در هندسه فرهنگ اسلامی است، بلکه این هندسه هر پانزده مقاله را حاوی است، ولی چون شیخ صاحب یکی از درخشانترین ذهن‌های استدلالی است، مثل هر ریاضی‌دان زبردست، در استدلال و حل هر قضیه فقط تکیه بر احکام واقعی و چهارچوب اصلی آن مسأله و قضیه کرده است و از بقیه استدلال های فرعی در گذشته و آن را بر عهدهٔ طالب و پژوهنده گذاشته است.

ابن سینا غیر از هندسهٔ *شفا* ظاهراً تألیفات دیگری هم در هندسه داشته است: در بین میکروفیلم‌های خطی کتابخانه مرکزی دانشگاه تهران میکروفیلمی به شماره ۱۱۹۰/۳ با عنوان *رسالة فی الزاویة الی ابی سهل المسیحی* وجود دارد که منسوب به شیخ‌الرئیس است. بروکلمان نیز از دو نسخهٔ خطی به نام رسالهٔ *تحقیق مبادی الهندسة* نام می‌برد که آن‌ها هم منسوب به شیخ‌اند.

کتاب هندسهٔ *شفا* به سال ۱۹۷۶ م برای عرضه در جشن هزارهٔ بوعلی سینا با اشراف دکتر ابراهیم مدکور و تحقیق دکتر عبدالحمید صبره و استاد عبدالحمید لطفی و کمک دکتر نبیل شهاوی چاپ شد؛ امّا چنان که دکتر مدکور درمقدمه‌این چاپ از کتاب می‌گوید، قبل از چاپ کتاب استاد عبدالحمید لطفی درگذشت و دکتر صبره و دکتر نبیل شهاوی هم به آمریکا و کانادا رفتند و بالنتیجه کار تصحیح مطبعی کتاب به واسطهٔ بعد مسافت میان این دو، و درگذشت استاد لطفی دچار خلل شد؛ علاوه بر این، آنان که می‌بایست تصاویر و اشکال کتاب را ترسیم کنند در کار خود اهمال کردند و سرانجام کتاب با نقایص و اغلاط بسیار منتشر شد. سخن دکتر مدکور را اغلاط و نقایص موجود در چاپ حاضر تأیید می‌نماید و ضرورت دارد که چاپ مُصحَّح و مُنقَّحی از آن تقدیم اهل فضل شود.

پس از این مقدمه، کتاب هندسه *شفا* را تصفح می‌کنیم تا دریابیم حضرت شیخ پانزده مقالهٔ هندسه و مبادی تصوری و تصدیقی هندسه را چگونه عرضه کرده است؛ همچنین برای آشنایی با طریق استدلال او یکی از قضایای هندسه اقلیدس را که شیخ راه حلّ جداگانه‌ای برای آن عرضه کرده است، شرح می‌دهیم.

مقالات هندسهٔ *شفا*

فهرست مقالات پانزده گانه هندسه *شفا* به شرح زیر است:

مقالهٔ اول: در تعریف مثلث و متوازی الاضلاع؛ مقالهٔ دوم: در خط مستقیم و تقسیم آن؛ مقالهٔ سوم: در دوائر؛ مقالهٔ چهارم: در مثلث‌ها و دوائر؛ مقالهٔ پنجم: در نسب؛ مقاله ششم: در سطح‌های متشابه؛ مقالهٔ هفتم: در اشتراک و تباین؛ مقالهٔ هشتم: در متوالیات؛

مقالهٔ نهم: در متوالیات و عوامل و غیر عواملی که بدان پیوسته است؛ مقالهٔ دهم: در اشتراک و تباین و آن چه بدین دو پیوسته است؛ مقالهٔ یازدهم: در هندسهٔ فراغیه؛ مقالهٔ دوازدهم: در کثیرالسطوحها؛ مقاله سیزدهم: در تقسیم ذات وسط و طرفین و کثیرالاضلاع‌های منتظم؛ مقالهٔ چهاردهم: در تقسیم ذات وسط و طرفین و کثیرالسطوح‌های منتظم؛ مقالهٔ پانزدهم: در رسم احجام منتظم در احجام منتظم دیگر (*الشفاء* (الریاضیات)، ج ۱۱، ص ۱۶ـ۴۴۸).

پس از ذکر عناوین مقالات پانزده‌گانهٔ هندسهٔ اقلیدسی *شفا* لازم است که به اجمال ببینیم که شیخ مبادی **تصوری** و **تصدیقی** هندسه را چگونه بیان کرده است.

ابن سینا نقطه را چیزی می‌داند که واجد جزء نیست: «النقطة شیء و لا جزء له» (همان، ج ۱، ص ۱۶). مراد از کلمه «شیء» در این تعریف شیء تعلیمی است، نه شیء طبیعی؛ زیرا بنا بر مشی مشائی شیخ شیء طبیعی نمی تواند بی‌جزء و تجزیه‌ناپذیر باشد. البته نباید پنداشت که غرض او از این تعریف، حد یا رسم منطقی است؛ زیرا چه در حد و چه در رسم، حاجت به جنس، یعنی مقوله‌ای از مقولات عشر است و به اجماع منطقیان نقطه خارج از مقوله می‌باشد و بیان شیخ دربارهٔ نقطه اشارهٔ توضیحی دربارهٔ آن است. وی پس از بیان نقطه به خط می‌پردازد و می‌گوید آن طولی است بدون عرض و با این بیان، شناخت خط را وابسته به شناخت قبلی طول در وجه ایجابی و عرض در وجه سلبی کرده است که با این تبیین، خط مستقیم و خط منحنی مبیّن می‌گردند. پس از این بیان، شیخ به شناسایی خط مستقیم می‌پردازد و می‌گوید: خط مستقیم خطی است که هر نقطهٔ رسم شده بر آن خواهان مقابله‌ای با دو نقطهٔ ابتدایی و انتهایی خط گردد (همانجا)، یعنی ویژگی‌ای که خط منحنی فاقد آن است. این تعریف تا حدی مبهم است، لذا برای رفع ابهام از آن، ابتدا قول شیخ را می‌آوریم که می‌گوید : «الخط المستقیم هو المخطوط علی استقبال کل نقطة تفرض فیه لطرفیه» (همانجا). علّت ابهام در این بیان، ذکر کلمه «استقبال» است[1] که مقصود از آن این است که چون چشم از

۱. مصدرِ «استقبال» در این جا به این معنی است که هر نقطهٔ واقع بر خط قصد مقابله با نقطهٔ ابتدایی و انتهایی خط را دارد.

یک طرف خط بر این نقطه دقیق شود، دیدار این نقطه مانع دیدار نقطهٔ آن طرف خط (طرف ابتدا یا طرف انتها) در راستای دیدار می شود، مانند کاری که درودگران برای اطمینان از استقامت و راستایی قطعه چوبی می‌کنند که خود آن را تراش داده و رندیده‌اند. در ترجمهٔ انگلیسی کتاب *اصول* اقلیدس خط مستقیم با کمی تغییر چنین توضیح داده شده است: خط مستقیم آن خطی است که همهٔ نقاط واقع بر روی آن به یکسانی بر آن قرار گیرد؛ یعنی برخلاف خط منحنی، یکی در فوق و دیگری در زیر آن واقع نشود.[1] خواجه نصیر طوسی در تحریر *اصول* اقلیدس خط مستقیم را چنین تعریف می‌کند: «هوالذی یکون وضعه علی ان یتقابل ایّ نقطهٔ یفرض فیها بعضها لبعض». خواجه با آوردن دو واژه «وضع» و «یتقابل» تعریفی روشن ارائه داده است.

شیخ پس از بیان خط به سطح می‌پردازد و آن را با نام «بسیط» چنین تعریف می کند: «آن چیزی است واجد طول و عرض که مانند خطوط، مبدئی و منتهایی دارد»، البته باید توجه شود که در خط دو نقطهٔ حدی وجود دارد که ابتدا و انتهای پاره خط است، ولی سطح دارای چهار حد ابتدایی و انتهایی، شامل دو طول و دو عرض است. ابن سینا پس از بیان بسیط، یعنی سطح، به بیان سطح مستوی با ترکیب «البسیط للسطح» می‌پردازد و آن را چنین وصف می‌کند: «آن گستره، یعنی بسیطی است که اگر خطی بین دو حد آن (یعنی طول و عرض) رسم شود، باید طلب مقابله‌ای با یکی از دو حد کند به شرط آن که در جهت آن حد چشم دقیقاً متوجه آن خط گردد» (همان، ج ۱، ص ۱۷).

پس از بیان این مبادی **تصوری** هندسه، شیخ مبادی **تصدیقی** آن را با واژه‌هایی نقل می کند که امروز مصطلح هندسه دانانان نیست. او «اصول موضوعه»[2] را «اصول التقدیر» می‌خواند و «بدیهیات»[3] را «علوم جامع» می‌نامد (همان، ص۱۹). این مطلب را که «علوم جامع» مصطلح شیخ همان بدیهیات است، از اینجا می توان دریافت که

1. A straight line is a line that lies evenly with the point on itself.
2. Postulates
3. Axioms

اصطلاح «جامع علوم» با یکی از بدیهیات، فی المثل حکم «دو چیز مساوی با چیز سوم، خود با هم برابرند» انطباق دارد. در یکی از ترجمه‌های انگلیسی کتاب اقلیدس نیز که در مجموعهٔ «کتاب های بزرگ»[1] آمده، «علم جامع» در برابر Common notion ذکر شده است؛ و این می‌رساند که حضرت شیخ ترجمهٔ عربی دقیقی از کار اقلیدس در دست داشته است.

در این جا نمی‌توان از عنوان غریب «هندسهٔ فراغیه» که عنوان مقالهٔ دهم کتاب اقلیدس است، بدون توضیح گذشت. هندسهٔ فراغیه همان هندسهٔ فضایی امروزی است که از احجام و به قول شیخ از «اشکال مجسمه» بحث می‌نماید؛ و در توضیح ابن سینا، مجسم شکلی است که احاطه بر چیزی دارد که واجد طول و عرض و عمق است و حدود[2] آن «بسائط» است که به زبان امروز سطوح جانبی نام دارد (الشفا (الریاضیات)، ص ۳۷۵).

حال که از تعاریف هندسه در *شفا* فارغ شدیم، برای آشنایی به نحوهٔ استدلال شیخ به ذکر یکی از قضایای مهم هندسه می پردازیم که شیخ علاوه بر حل اقلیدس راه حل دیگری برای آن با قید «بصفة اخری» عرضه می‌کند (همان، ص ۴۱۵)، و خواجه نصیر نیز آن را به صورت قضیه‌ای جداگانه، ولی مُلهم از شیخ، می‌آورد. قبل از ورود به آن قضیه لازم است از نسبت ذات وسط و طرفین و از طرز تقسیم خط بر این طریق صحبت کنیم و سپس به آن قضیه که حل آن مبتنی بر این طریق است بپردازیم:

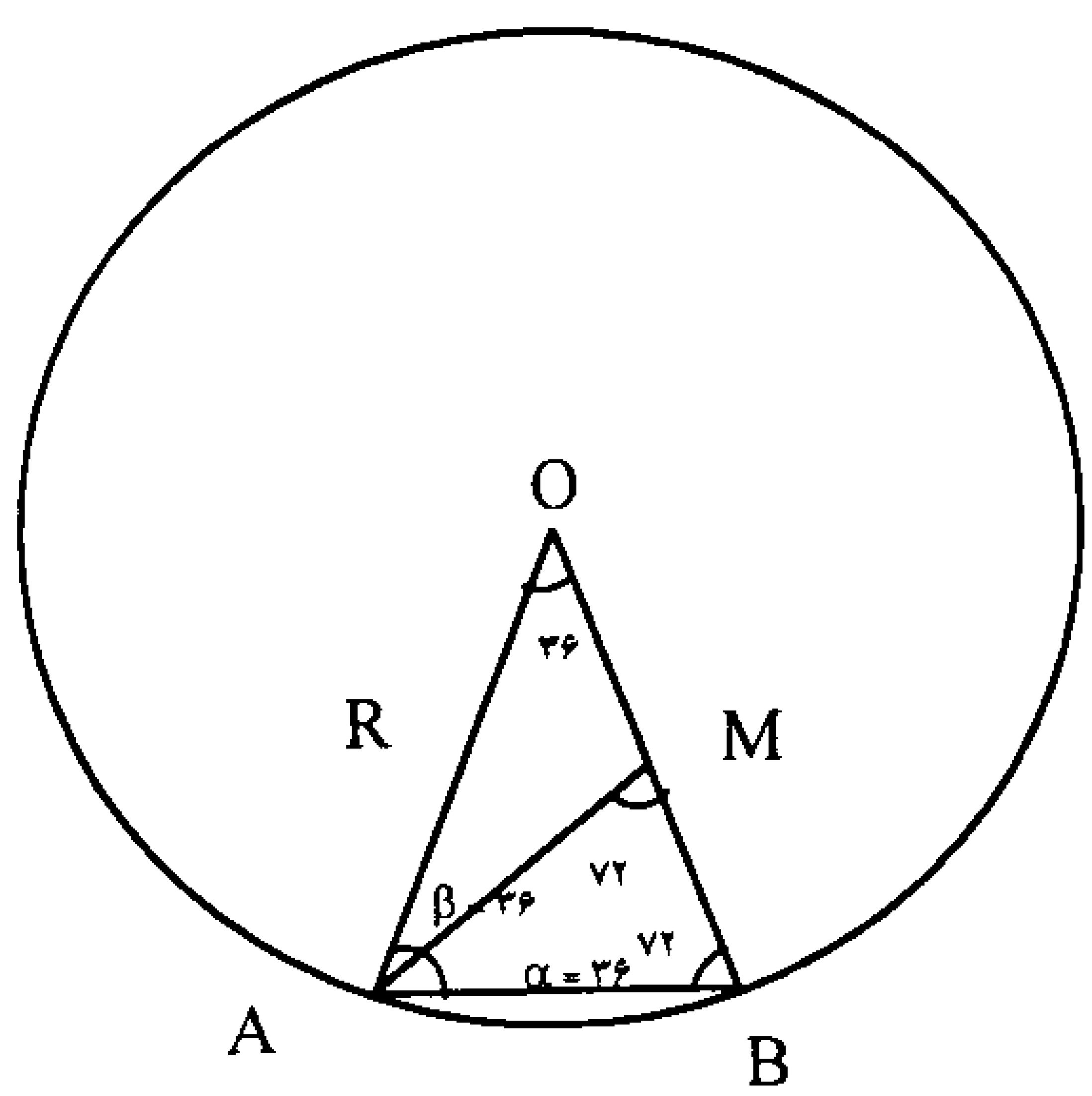
این نسبت که به «نسبت طلایی»[3] مشهور است، در هنر یونانی جایی خاص دارد؛ چه یونانیان می‌گفتند: هرگاه مستطیلی داشته باشیم که نسبت عرض مجهول آن، یعنی x به طول معلوم آن، یعنی l از تساوی نسبت $\frac{l}{x}=\frac{x}{l-x}$ و یا معادله درجه دوم $x^{2}+lx \quad l^{2}=0$ به دست آید، این مستطیل زیباترین شکل را دارد. در زبان

1. Great Books

2. extremities

3. Golden Proportion / Proportion d' or

این نسبت اگر در تقسیم خطی به کار رود، با عبارت تقسیم خط به نسبت ذات وسطُ‌الطرفین[1] می‌آید؛ و نیز به شرح زیر در تعیین اندازهٔ ضلع ده ضلعی منتظم و رابطهٔ آن با شعاع دایرهٔ محیطیِ این کثیرالاضلاع به کار می‌رود:



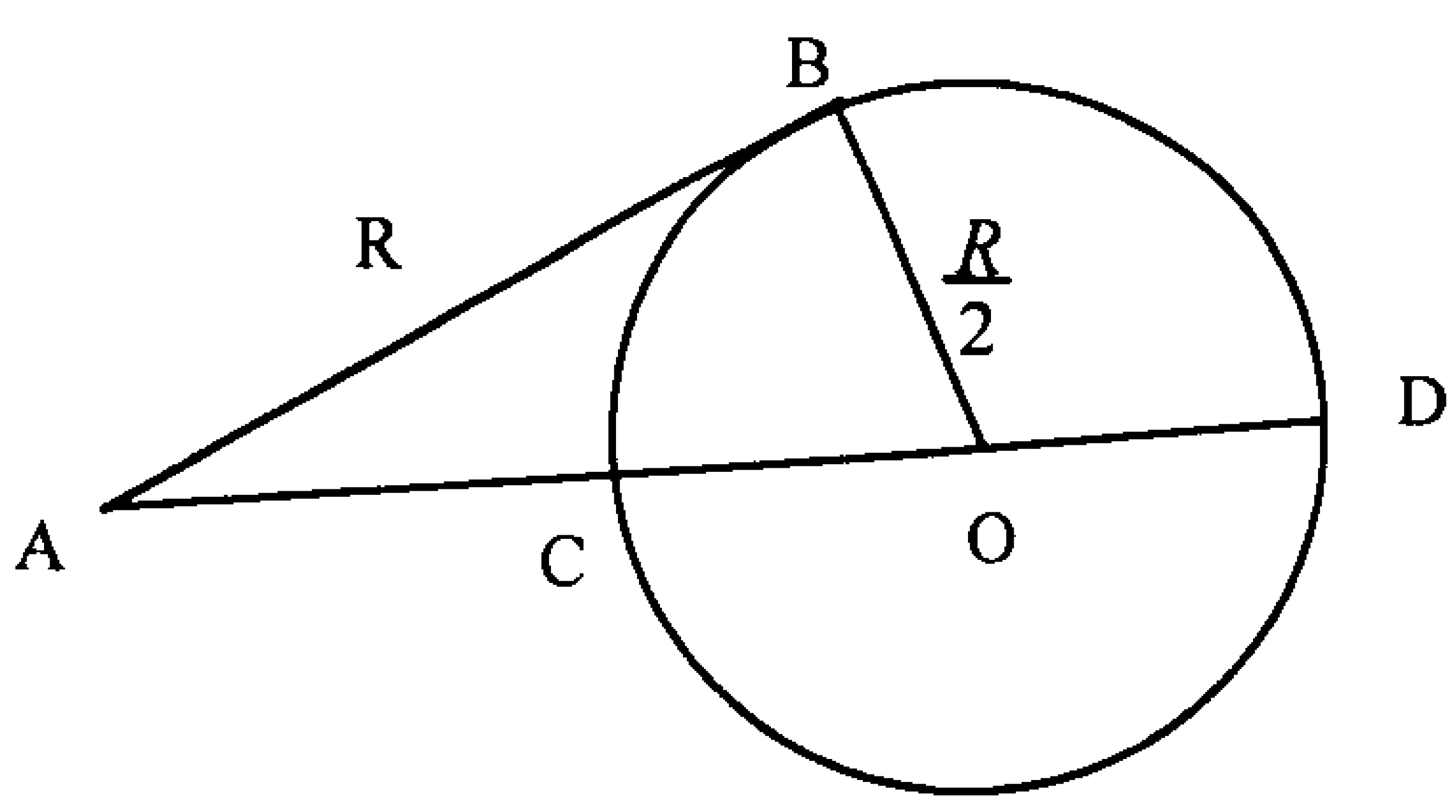
در دایره‌ای به شعاع R، اگر وتر AB، ضلعِ یک ده ضلعی منتظم محاطی باشد زاویهٔ $\hat{O}$ برابر ۳۶ درجه است. (تقسیم ۳۶۰ بر ده). در مثلث متساوی الساقین OAB چون زاویهٔ $\hat{O}$ برابر ۳۶ درجه است زوایای دو ساق، یعنی $\hat{B}$ و $\hat{A}$ هریک برابر ۷۲ می‌باشند. حال اگر زاویهٔ $\hat{A}$ را به‌دو قسمت مساوی تقسیم کنیم، مثلث متساوی الساقین AMB به دست می‌آید که زاویهٔ رأس آن یعنی $\hat{\alpha}$ برابر ۳۶ درجه و زاویه‌های $\hat{B}$ و $\hat{M}$ آن هر یک برابر ۷۲ درجه است. در این مثلث $\overline{AB} = \overline{AM}$ (دو ساق مثلث متساوی الساقین). از طرف دیگر مثلث AMO نیز متساوی الساقین است زیرا زاویهٔ $\hat{\beta}$ و $\hat{O}$ هر یک برابر ۳۶ درجه است و از آن نتیجه می شود $OM=AM$ (دو ساق مثلث متساوی الساقین). از این تساوی برمی‌آید که $\overline{AB}$ مساوی $\overline{OM}$ است $(\overline{AB} = \overline{AM} = \overline{OM})$ و چون $\overline{OB}$ مساوی R است و $\overline{OM}$ برابر $\overline{AB}$، لذا طول $\overline{MB}$ برابر است با $R - \overline{AB}$.

از طرف دیگر می‌دانیم که دو مثلث OAB و مثلث AMB متشابه‌اند، زیرا زوایای آنها دو به دو متساویند، لذا نسبت تشابه را می‌نویسیم و آن عبارت است از نسبت $\frac{\overline{AB}}{\overline{BM}}$ در مثلث AMB و نسبت $\frac{\overline{OA}}{\overline{AB}}$ در مثلث OAB و این دو نسبت به واسطهٔ

1. To cut in extreme and mean ratio

تساوی زوایای نظیر اضلاع مساویند، یعنی $\frac{\overline{OA}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BM}}$ اما $\overline{AB} = x$، زیرا طول ضلعِ ده ضلعی منتظم است و مجهول، نیز $\overline{OA}$ برابرِ R و $\overline{BM}$ برابر R-x است. حال نسبت فوق را با این مقادیر می‌نویسیم:

$$\left(\frac{\overline{OA}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BM}}\right) \to \frac{R}{x} = \frac{x}{R-x} \to \left(x^۲ + Rx - R^۲ = ۰\right)$$



حال برای یافتن طول x با داشتن شعاع R چنین عمل می‌کنند که خط AB را برابر R رسم می‌نمایند. سپس از نقطهٔ B عمود $\frac{R}{۲}$ را از آن اخراج می‌کنند چون نقطهٔ O به دست آمد دایره‌ای به مرکز O و به شعاع $\frac{R}{۲}$ رسم می‌کنند. حال اگر از نقطهٔ A به نقطهٔ O وصل کنیم و آن را ادامه دهیم تا دایره را در D قطع کند، توان نقطه A نسبت به دایرهٔ O برابر است با $\overline{AC} \times \overline{AD}$ و با تساوی $\overline{AC} = x$ و $\overline{AD} = \overline{AC} + \overline{CD}$ و یا

$\overline{AD} = \overline{AC} + ۲(\frac{R}{۲})$ و یا AD=x+R لذا $\overline{AC} \times \overline{AD} = x(R+x)$

و از طرف دیگر توان نقطهٔ A برابر توان دوم مماس $\overline{AB}$یعنی $R^۲$ است، پس $\overline{AC} \times \overline{AD} = x(R+x) = R^۲$ و از آن جا $x^۲ + Rx - R^۲ = ۰$ و x یعنی طول ده ضلعی منتظم برابر است با $\overline{AC}$.

حال که تقسیم خط را به نسبت ذات وسط و طرفین دانستیم، به مسألهٔ مورد بحث رجوع می‌کنیم و به راه حل خاص شیخ در این مسأله که می‌پردازیم. چنان که گفتیم هندسهٔ اقلیدس فاقد این راه حل است و خواجه نصیر نیز آن را به صورت قضیه‌ای جداگانه در تحریر *اصول* اقلیدس آورده است. این مسأله در مقالهٔ سیزدهم آمده، بدین

شرح است:

هرگاه قطعه خطی به نسبت ذات وسط و طرفین تقسیم شود و دو قطعهٔ تقسیم شده مشخص گردد، چنانچه اندازهٔ قطعهٔ بزرگتر را با نصف اندازهٔ قطعه خط جمع کنیم و حاصل جمع را مربع نماییم، نتیجهٔ به دست آمده پنج برابر مربع نصف اندازهٔ قطعه خط است.

راه حل: فرض می‌کنیم طول قطعه خط AB، l باشد و به نسبت ذات وسط و طرفین تقسیم شود و اندازهٔ قسمت بزرگتر x گردد. می‌خواهیم ثابت کنیم که x به اضافه نصف l یعنی $\frac{l}{۲}$، به توان دو، برابر است با ۵ برابر مربع $\frac{l}{۲}$ یعنی $۵\frac{l^۲}{۴} = [x+\frac{l}{۲}]^۲$.

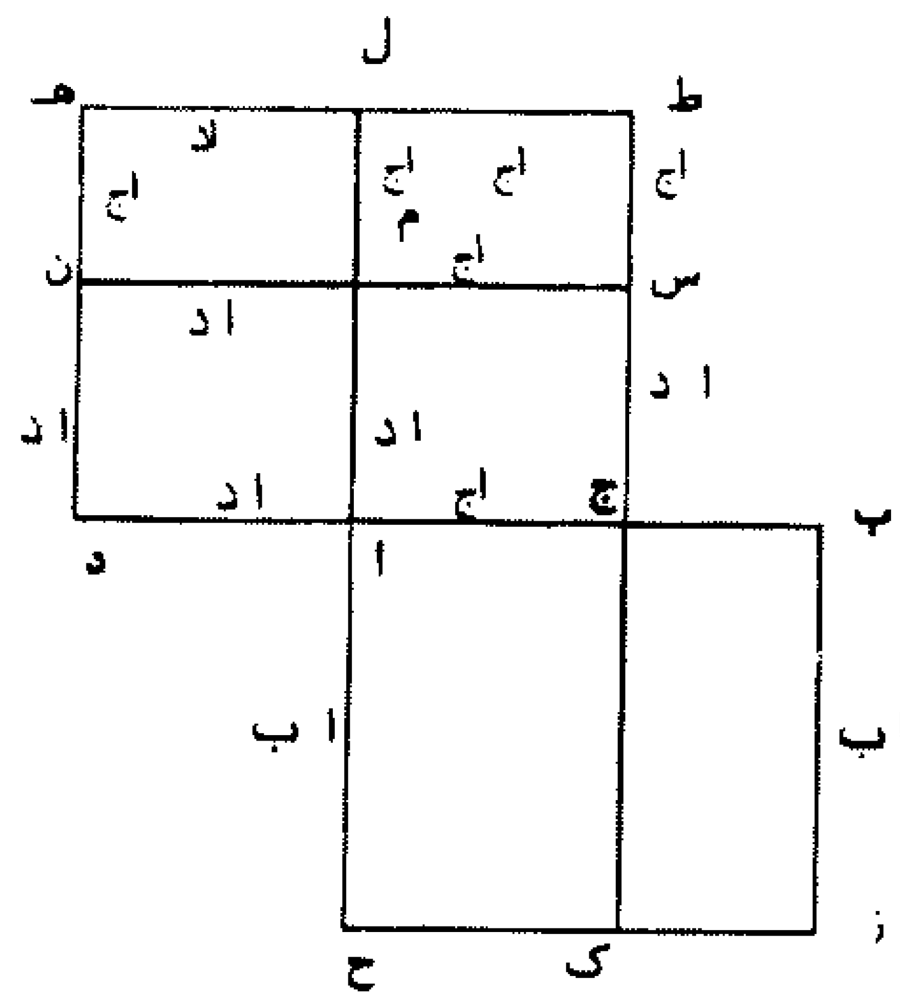
قبل از حل هندسی آن برای تشحیذ ذهن پژوهنده مسأله را از طریق جبری حل می‌کنیم و سپس به راه حل هندسی آن می‌پردازیم (البته‌این راه حل آن روزها به واسطهٔ نبودن راه حل جبری معادله درجه دوم وجود نداشته است)[۱]. پس می‌گوییم اگر قطعه خطی به طول l به نسبت ذات وسط و طرفین تقسیم شود و x اگر قطعهٔ بزرگتر باشد مقادیر x و l باید در معادلهٔ درجه دوم $x^۲+lx-l^۲=۰$ صدق کند. از این معادله مقدار x مساوی است با:

$$x=\frac{-l+\sqrt{l^۲+۴l^۲}}{۲}=\frac{-l+\sqrt{۵l^۲}}{۲}=\frac{-l+l\sqrt{۵}}{۲}$$

حال اگر بخواهیم $(x+\frac{l}{۲})$ را به دست آوریم در حقیقت باید به $\frac{-l+l\sqrt{۵}}{۲}$ که برابر x است $\frac{l}{۲}$ اضافه نماییم که می شود $\frac{-l+l\sqrt{۵}}{۲}+\frac{l}{۲}=\frac{l\sqrt{۵}}{۲}$، پس $x+\frac{l}{۲}=\frac{l\sqrt{۵}}{۲}$ و چون طرفین مربع شوند، می شود $\left[x+\frac{l}{۲}\right]^۲=۵\frac{l^۲}{۴}$، همان چیز که می خواستیم.

---

۱. بنابر نظر یکی از داوران محترم بابلی ها راه حلّ آن را می دانسته‌اند (مجلهٔ تاریخ علم).



راه‌حل هندسی

از تقسیم خط مفروض «اب» به نسبت ذات وسط و طرفین دو قطعه «اج» و «ب ج» حاصل شده است. حال خط «اد» را که نصف «$\overline{\text{اب}}$» است به «$\overline{\text{اج}}$» که قسمت بزرگتر تقسیم «$\overline{\text{اب}}$» به نسبت ذات وسط و طرفین است اضافه می‌کنیم، طول «ج د» به دست می آید. حکم مسأله این است : $\overline{\text{دج}}^{2} = 5(\overline{\text{دا}})^{2}$

راه‌حل اقلیدس

برای اثبات می‌گوییم چون $\overline{\text{اد}}+\overline{\text{اج}}=\overline{\text{دج}}$ و یا $\frac{\overline{\text{اب}}}{2}+\overline{\text{اج}}=\overline{\text{دج}}$. و حال $\overline{\text{دج}}$ را مربع می‌کنیم، یعنی مربع «ج ط ه د» را می‌سازیم. پس مساحت مربع «ج ط ه د» = $\overline{\text{دج}}^{2}$. «$\overline{\text{اب}}$» را نیز مربع می‌کنیم، یعنی مربع «ب ا ح ز» را تشکیل می‌دهیم. و قطر «ط د» را رسم می‌کنیم تا پاره‌خط «ا ل» را در نقطه «م» قطع کند، از «م» نیز به موازات «ج د» خطی رسم می‌کنیم تا پاره‌خطهای «ج ط» و «د هـ» را در نقاط «س» و «ن» قطع کند، بنابر نسبت ذات وسط و طرفین رابطهٔ «$\overline{\text{بج}}\times\overline{\text{اب}} = \overline{\text{اج}}^{2}$» برقرار است. اما سطح مستطیل «ب ج ک ز» برابر است با «$\overline{\text{بج}}\times\overline{\text{اب}}$» و چون «$\overline{\text{بج}}\times\overline{\text{اب}}$» برابر با $\overline{\text{اج}}^{2}$ است، لذا سطح مستطیل «ب ج ک ز» = $\overline{\text{اج}}^{2}$. از طرف دیگر، دو ضلع «$\overline{\text{ام}}$» و «$\overline{\text{سج}}$»

برابر با «$\overline{\text{اد}}$» است، پس طول «$\overline{\text{س ط}}$» مساوی «$\overline{\text{اج}}$» می‌باشد، زیرا «$\overline{\text{جد}} = \overline{\text{سج}} + \overline{\text{سط}}$»، در نتیجه مساحت مربع «ط س م ل» برابر «$\overline{\text{اج}}^{۲}$» می شود (زیرا اندازهٔ اضلاع آن برابر $\overline{\text{اج}}$ است) و از آن جا مساحت مستطیل «ب ج ک ز» برابر مساحت مربع «ط ل م س»، یعنی «$\overline{\text{اج}}^{۲}$» می‌شود. و اما در مربع «ب ا ح ز» ضلع «$\overline{\text{اح}}$» برابر «$\overline{\text{اب}}$» است و چون «$\overline{\text{اب}}$» دو برابر «$\overline{\text{اد}}$» است پس «$۲\overline{\text{اد}} = \overline{\text{اح}}$» و بالنتیجه نسبت مساحت مستطیل «ج ا ح ک» به مساحت مستطیل «س م ج ا» برابر نسبت ضلع «$\overline{\text{اح}}$» به «$\overline{\text{اد}}$» است

یعنی:

$$۲ = \frac{\overline{\text{اب}}}{\overline{\text{اد}}} = \frac{\overline{\text{اح}}}{\overline{\text{اد}}} = \frac{\overline{\text{اح}} \times \overline{\text{اج}} \text{ (یعنی مساحت مستطیل «ج ا ح ک»)}}{\overline{\text{اد}} \times \overline{\text{اج}} \text{ (یعنی مساحت مستطیل «س م ج ا»)}}$$

پس مساحت مستطیل «ج ا ح ک» برابر مجموع مساحت مستطیل «ج س م ا» و مستطیل «ل ه ن م» می شود و هم چنین مساحت مستطیل «ب ج ک ز» برابر مساحت مستطیل «ط ل م س» است، لذا می توان نوشت:

= مساحت مستطیل «ب ج ک ز» + مساحت مستطیل «ج ا ح ک» = $\overline{\text{اب}}^{۲}$ = مساحت مربع «ا ب ز ح»

مساحت مربع «ط ل م س» + مساحت مستطیل «ل ه ن م» + مساحت مستطیل «ج س م ا»

از طرفی

= مساحت مربع «ط ل م س» + مساحت مستطیل «ل هـ نم» + مساحت مستطیل «ج س م ا»

$\overline{\text{اد}}^{۲} - \overline{\text{دج}}^{۲}$ = مساحت مربع «ا م ن د» - مساحت مربع «ج ط ه د»

در نتیجه $\overline{\text{جد}}^{۲} = ۵\overline{\text{اد}}^{۲}$ و $\overline{\text{اب}}^{۲} = (۲\overline{\text{اد}})^{۲} = ۴\overline{\text{اد}}^{۲} = \overline{\text{جد}}^{۲} - \overline{\text{اد}}^{۲}$

راه حل ابن سینا

راه حل شیخ بسیار آسان تر است. وی می‌گوید: چون خط «$\overline{\text{اب}}$» به نسبت ذات وسط

و طرفین تقسیم شد، رابطهٔ «اب بج = اج۲» به دست می‌آید و از آن جا که «اب» دو برابر «اد» است پس ۴اد۲ = اب۲، اما چون «اح» مساوی «اب» است پس مساحت مربع «ب ا ح ز» که برابر است با مساحت مستطیل «ب ج ک ز» به اضافهٔ مساحت مستطیل «ج ا ح ک»، عبارت است از (اب بج) + (اب اج) = اب۲ و از آن جا که بنا به تقسیم ذات وسط و طرفین اب بج = اج۲، لذا در رابطهٔ قبل به جای (اب بج) مساویش اج۲ را می‌گذاریم، نتیجه می‌شود:

اج۲ + (اب اج) = اب۲ و یا (اج + اب)اج = اب۲ و چون «اد−جد = اج» و ۴اد۲ = اب۲، به جای «اج» مساویش «اد − جد» و به جای «اج + اب» مقدار «اج + اد۲» را قرار می‌دهیم؛ اما چون «اج + اد۲» مساوی «جا + اد + اد» می‌باشد و نیز «اج + اد» مساوی دج است، لذا «جد + اد»= «اج + اد۲» می‌شود حال در رابطهٔ (اج + اب)اج = ۴اد۲ = اب۲ به جای اج مساویش «اد − جد» و به جای «اج + اب» مساویش «اد + جد» را می‌نهیم، نتیجه می‌شود:

«اب۲ = ۴اد۲ = (جد + اد) (اد − جد) = جد۲ − اد۲»

لذا اد۲ − جد۲ = ۴اد۲

و یا جد۲ = ۵اد۲ و یا ۵اد۲ = جد۲

در این استدلال ها برای نشان دادن روابط تا حدی از روش جدید و متداول تبعیت شد.

راه حل مؤلف

چون چهارضلعی (ج ط ه د) مربع است پس مساحت آن جد۲ و برابر با مجموعِ چهار مساحت زیر است؛ یعنی:

جد۲ = «م ن د ا»مساحت + «س م ج ا» مساحت + «ط ل م س» مساحت + «ل ه م ن»مساحت

حال مقدار مساحت ها را جایگزین می‌کنیم:

$$\overline{\text{جد}}^2 = \overline{\text{اد}}^2 + (\overline{\text{اد}} \times \overline{\text{اج}}) + (\overline{\text{اج}}^2) + (\overline{\text{اد}} \times \overline{\text{اج}}) \quad (1)$$

سپس در رابطهٔ (۱) به جای $(\overline{\text{اج}}^2)$ مقدارش را بر حسب تقسیم خط $\overline{\text{اب}}$ به نسبت ذات وسط و طرفین که می‌شود: $(\overline{\text{اج}}^2 = \overline{\text{اب} \times \text{بج}})$ می‌گذاریم و رابطه(۲) چنین می‌شود:

$$\overline{\text{جد}}^2 = \overline{\text{اد}}^2 + (\overline{\text{اج}} \times \overline{\text{اد}}) + (\overline{\text{اب}} \times \overline{\text{بج}}) + (\overline{\text{اج}} \times \overline{\text{اد}}) = \overline{\text{اد}}^2 + 2(\overline{\text{اج}} \times \overline{\text{اد}}) + (\overline{\text{اب}} \times \overline{\text{بج}})$$

و چون $\overline{\text{اب}}$ برابر $2\overline{\text{اد}}$ است لذا رابطهٔ (۲) چنین می شود:

$$\overline{\text{جد}}^2 = \overline{\text{اد}}^2 + 2\,(\overline{\text{اد}} \times \overline{\text{اج}}) + (2\overline{\text{اد}} \times \overline{\text{بج}})$$

اگر $2\overline{\text{اد}}$ را در این رابطه فاکتور بگیریم، می‌شود: $\overline{\text{جد}}^2 = \overline{\text{اد}}^2 + 2\overline{\text{اد}}(\overline{\text{اج}} + \overline{\text{جب}} = \overline{\text{اب}})$

و چون $\overline{\text{اب}}$ مساوی $2\overline{\text{اد}}$ است، لذا $\overline{\text{جد}}^2 = \overline{\text{اد}}^2 + 2\overline{\text{اد}} \times 2\overline{\text{اد}}$

و یا $\overline{\text{جد}}^2 = \overline{\text{اد}}^2 + 4\overline{\text{اد}}^2$

و ازآنجا:

$$\overline{\text{جد}}^2 = 5\overline{\text{اد}}^2$$

نتیجه‌گیری

با امعان نظر در مقالهٔ کوتاهی که در زمینهٔ هندسهٔ اقلیدس در *شفا* پیش روی پژوهشگران تاریخ علم نهاده شد، آشکارا معلوم می‌گردد که جایگاه والای ابن سینا در هندسه (فن اوّل از علم ریاضی در شفا) در مقایسه با دیگر زمینه‌هایی که‌این دانشمند یگانه از خود برجای نهاده (فلسفه، پزشکی، موسیقی، هیات و نجوم) تقریباً ناشناخته باقی مانده است و ضرورت دارد پژوهشگران ایرانی در سپاس و بزرگداشت عملی از وی، به نشر انتقادی و علمی این بخش از ریاضیات شفا (مشتمل بر بیش از ۴۵۰ صفحه به قطع رحلی) با تبیین و تحلیل مباحث و مسائل آن برپایهٔ ریاضیات امروز اقدام کنند.

منابع

ابن سینا، حسین بن عبدالله، *الشفاء*، (الریاضیات)، باهتمام ابراهیم مدکور، قم، ۱۴۰۵ق.

ابن القفطی، جمال الدین ابی الحسن علی بن یوسف، *تاریخ الحکماء*، باهتمام دکتر جولیوس لیپرت، لایپزیک، ۱۹۰۳م.

ابن ندیم، *الفهرست*، باهتمام رضا تجدّد، طهران ۱۳۹۱ ق/۱۹۷۱ م.

دائرة المعارف بزرگ اسلامی، جلد نهم، زیر نظر کاظم موسوی بجنوردی، تهران، ۱۳۷۹ش، (ذیل «اقلیدس»، تألیف علیرضا جعفری نائینی - محمدعلی مولوی).

سارتن، جورج، *تاریخ علم*، ترجمهٔ احمد آرام، تهران، ۱۳۵۷ ش.

ویل دورانت، *تاریخ تمدن* (یونان باستان)، ج ۲، ترجمهٔ فتح الله مجتبائی، هوشنگ پیرنظر و امیرحسین آریان پور، تهران، ۱۳۶۵ش.

Poincaré, H., *Science and Hypothesis*, English translation, Dover, 1952, French edn, Flammarion, 1968.

پیوست: ★

المقالة الثالثة عشرة

من اوقليدس

بسم الله الرحمن الرحيم

خط ا ب قسم على نسبة ذات وسط و طرفين على ج و وصل بالأطول منه ا د مثل نصف ا ب فــ ج د [فى] نفسه خمسة أمثال د ا فى نفسه. ونعمل على ج د مربع ج هــ و على ا ب مربع ا ز ونخرج ج ک و ا ل فــ ط د القطر يقطع ا ل على م و على م س ن موازيا فــ ح ا أعنى ب ا مثلا ا م أعنى ا د و ک ا مثلا ج م ولأن ج ز مثل ا ب فى ب ج أعنى ج ا فى نفسه فــ م ط مثل ج ز فالعلم مثل ا ز فهو أربعة أمثال د ا فى نفسه و د م الخامس.

و بصفة أخرى ا ب فى ب ج أعنى ا ج فى نفسه و ا ب فى ا ج نفسه أعنى ضعف د ا فى ا ج مثل ا ب فى نفسه و هو أربعة امثال د ا فى نفسه، فنضيف الى ضعف د ا فى ا ج و ا ج فى نفسه و ا د فى نفسه فيكون ج د و فى نفسه خمسة أمثال د ا فى نفسه و بالعكس لأن العلم نصفين مثل ا ز وليكن هــ م م ج مثل ا ک يبقى م ط أعنى ا ج فى نفسه کــ ج ز أعنى ا ب فى ب ج و بصفة اخرى لأنه ليصير ضعف د ا فى ا ج و ا ج فى نفسه الذى هو ج د فى نفسه إلا ا د فى نفسه الذى هو کــ اب فى ا ج و ا ج فى نفسه أربعة أمثال د ا فى نفسه و هو ا ب فى نفسه أعنى ا ب فى ب ج و فى ا ج يبقى ا ب فى ب ج کــ ا ج فى نفسه.

فإن وصل بالأقصر مثل ب ج نصف الأطول مثل ج د فمربع جميع النصف الأطول و الأقصر أعنى ب د خمسة أمثال مربع نصف القسم الأطول فنعمل على ا ب مربع ا هــ ونخرج خط د ح ج ط على الموازاة و القطر ب ز و من ک و ل المقطعين م ن س ع على الموازاة ف ا ب فى ب ج أعنى سطح ا ن مثل ج ا فى نفسه أعنى م ط و م د ک د و هو ک ع فــ ا ن أعنى م ط مثل علم ص ت ى فالعلم اربعة أمثال ج د نصف ا ج فى نفسه يبقى ص ى أعنى د ج فى نفسه من د ع فــ د ع خمسة أمثاله.

★ نقل از *الشفا* (الفن الاوّل، من جملة العلم الرّياضى، اصول الهندسة)، ص ۴۱۵-۴۱۶.