

## رساله‌ای در استدلال بر روش ضرب و تقسیم شصتگانی<sup>۱</sup>

منسوب به شرف الدین طوسی (متوفی ۶۱۰ ق)<sup>۲</sup>

فاطمه سوادى

### چکیده

حساب شصتگانی که از ارکان حساب دوره اسلامی به شمار می‌رود، علاوه بر محاسبات نجومی، در محاسبات دقیق، مانند به دست آوردن جذر و کعب اعداد صحیح غیر شصتگانی نیز کاربرد داشته است؛ و ریاضیدانان مسلمان، پیش از ابداع و رواج کسرهای اعشاری، برای نمایش قسمت کسری اعداد از کسرهای شصتگانی بهره می‌جستند.

نظام عددنویسی<sup>۳</sup> و حساب شصتگانی سابقه‌ای بس طولانی در تاریخ ریاضیات دارد. سومری‌ها در حدود ۲۰۰۰ ق.م این نظام عدد نویسی را ابداع کردند و حساب مبتنی بر آن را گسترش دادند.

حساب شصتگانی متشکل از چهار عمل اصلی و استخراج جذر و کعب اعداد شصتگانی است. رساله مورد بررسی در این مقاله - که منسوب به شرف‌الدین طوسی، ریاضیدان بزرگ ایرانی است - دربرگیرنده استدلال بر روش ضرب و تقسیم شصتگانی، برمبنای تناسب است.

**کلید واژه‌ها:** حساب شصتگانی، نظام عددنویسی، ارزش مکانی، واحد، مرتبه، ضرب،

تقسیم، تناسب.

---

۱. معادل عربی / انگلیسی: ستینی / sexagesimal

۲. نگارنده بر خود فرض می‌شمارد که غایت امتنان و سپاس خویش را از جناب دکتر عالم زاده، به لحاظ عنایت‌های مشفقانه و مسؤولانه از آغاز تا انجام نگارش این مقاله، از جناب دکتر جعفری نائینی، برای مطالعه و افزودن سه نکته مفید بر این نوشتار، و همیاری تمام کارگزاران مجله ابراز دارد.

### نظام عددنویسی شصتگانی

حساب شصتگانی به همراه حساب انگشتی<sup>۱</sup> و حساب هندی، ارکان حساب دوره اسلامی را تشکیل می‌دادند (سعیدان، ص ۴۴۳). این حساب مبتنی بر نظام عددنویسی با مبنای ۶۰ است. در نظام عددنویسی شصتگانی واحد هر مرتبه، ۶۰ برابر واحد مرتبه پس از خود، و  $60^{-1}$  برابر واحد مرتبه پیش از خود است. یک عدد شصتگانی خالص را در حالت کلی می‌توان به صورت زیر نمایش داد:

$$\dots a_i \dots a_1 a_0 a_{-1} \dots, a_i < 60$$

که  $i$  نمایانگر توان عدد ۶۰ در هر مرتبه است.

معادل دهگانی یک عدد شصتگانی خالص را می‌توان از رابطه زیر به دست آورد:

$$\sum_i a_i \times 60^i$$

در متون حساب و نجوم دوره اسلامی، در حساب شصتگانی، هر مرتبه با نام (واحد) خاص خود مشخص می‌گردید (برای نمونه نک: اقلیدسی؛ بغدادی؛ کرجی؛ کوشیار؛ و ..، جاهای مختلف). جدول زیر نشان دهنده نام و ارزش هر مرتبه، طبق آثار اسلامی به جای مانده، است:

...	دو بار مرفوع	یک بار مرفوع	درجه	دقیقه	ثانیه	ثالثه	...
...	$60^2$	$60^1$	$60^0$	$60^{-1}$	$60^{-2}$	$60^{-3}$	...

مطابق جدول بالا، نام مرتبه‌ها با نمای عدد ۶۰ در هر مرتبه (ارزش هر مرتبه) ارتباط معنایی دارد.

احتمالاً برای نخستین بار سومری‌ها مبنای ۶۰ را در نظام عددنویسی خود به کار برده‌اند (اسمیت، دیوید<sup>۲</sup>، ص ۵۱). شاید علت این امر، استفاده سومری‌ها از عدد ۶۰ و مضارب آن به عنوان عامل تبدیل واحدها و مقادیر بوده باشد؛ زیرا عدد ۶۰

۱. الحساب الإصبعی (که آن را حساب الید یا الحساب الهوائی نیز می‌نامیدند).

2. Smith, David



اقوام سومری و بابلی برای صفر نمادی به کار نمی‌بردند<sup>۱</sup> (سارتون<sup>۲</sup>، p. 99)، و برای نمایش مرتبه خالی، به جای صفر، فاصله‌ای بزرگتر از فاصله معمول بین مرتبه‌ها قرار می‌دادند (نویگه باور<sup>۳</sup>، ص ۲۸)؛ برای مثال در لوح سفالین AO17264 که در موزه لوور، در پاریس، نگهداری می‌شود، مجذور عدد شصتگانی<sup>۴</sup> ۲۷؛ ۲ (۱۴۷ = ۲۷ + ۲ × ۶۰) به صورت زیر نمایش داده شده است (اکانر و رابرتسون، p. 2):

$$\begin{array}{c} \text{II} \ll \text{VI} \\ \text{II} \text{ II} \text{ II} \text{ II} \text{ II} \text{ II} \\ \text{II} \text{ II} \text{ II} \text{ II} \text{ II} \text{ II} \end{array} = 609$$

۲ ۲۷ مجذور = ۶۰۹

به رغم مزایای بسیار نظام عددنویسی سومری، مانند آسان شدن عملیات حسابی و سادگی نمایش کسرها، وجود نقاط ضعفی چون نحوه نمایش اعداد کوچک تر از ۶۰، عدم وجود علامتی برای صفر، و نیز فقدان نشانه خاص برای مشخص نمودن مرتبه‌ها، موجب گردیده تا این نظام فاقد ارزش مکانی کامل باشد؛ هر چند این مسأله از اهمیت تاریخی نظام عددنویسی سومری، و نقش برجسته آن در گسترش علم حساب نمی‌کاهد.

یونانی‌ها، نظام عددنویسی شصتگانی را فقط برای نمایش قسمت کسری اعداد به کار می‌بردند. آنان برای نشان دادن اعداد صحیح، و یا قسمت صحیح اعداد، از نظام عددنویسی دهگانی، به روش افزایشی<sup>۴</sup>، استفاده می‌کردند؛ یعنی ۲۷ حرف الفبا را که هر یک نماینده یکی از اعداد ۱ - ۹، ۱۰ - ۹۰، و ۱۰۰ - ۹۰۰ بود، برای نمایش اعداد مختلف، کنار هم قرار می‌دادند. یونانی‌ها برای نمایش کسرها، شصتگانی نیز همین

۱. دقیقاً مشخص نیست که علامت صفر از چه زمانی وارد عددنویسی بابلی شده، ولی طبق شواهد موجود، پیش از ۱۵۰۰ ق.م وجود نداشته، در حالی که در حدود ۳۰۰ ق.م کاملاً رایج بوده است. در کتیبه به دست آمده از کیش که اس. لانگدون، آن را متعلق به دوره داریوش کبیر (۵۰۰ ق.م) می‌داند، چهار بار علامت صفر به کار رفته و یک جا از قلم افتاده است (نویگه باور، ص ۳۸).

2. Sarton
3. Neugebauer
4. additive

نمادها را به کار می‌بردند (برگرن<sup>۱</sup>، ص ۵۳ - ۵۴).

A=۱	I=۱۰	p=۱۰۰
B=۲	k=۲۰	Σ=۲۰۰
Γ=۳	λ=۳۰	T=۳۰۰
Δ=۴	M=۴۰	Υ=۴۰۰
E=۵	N=۵۰	Φ=۵۰۰
Ϛ [ζ]=۶	Ξ=۶۰	X=۶۰۰
Z=۷	O=۷۰	Ψ=۷۰۰
H=۸	Π=۸۰	Ω=۸۰۰
θ=۹	ρ=۹۰	T [τ]=۹۰۰

جدول نمایش ارقام شصتگانی در عددنویسی یونانی (هیث<sup>۲</sup>، ص ۲۰)

ریاضی دانان مسلمان نیز با به کارگیری حروف ابجد به عنوان نماد، از همان شیوه یونانی استفاده می‌کردند. به طور کلی نظام های عددنویسی مسلمانان را در سده‌های میانه می‌توان به سه دسته تقسیم کرد (برای توضیح بیشتر، نک. همو، ص ۵۴ - ۵۵):

۱. نظام عددنویسی دهگانی - شصتگانی، که در آن اعداد را با حروف ابجد می‌نوشتند و تنها برای نوشتن کسر ها از نظام شصتگانی تبعیت می‌شد (برای نمونه نک. اقلیدسی، ص ۲۳۱، ۳۷۰-۳۷۹).

۲. نظام عددنویسی هندی، که برای اعداد صحیح، دهگانی و دارای ارزش مکانی کامل بود، ولی در آن نیز برای نمایش قسمت کسری عدد، از نظام شصتگانی تبعیت می‌شد و مراتب اعداد شصتگانی با استفاده از ارقام هندی از بالا به پایین می‌نوشتند (برای نمونه نک. اقلیدسی؛ بغدادی؛ کرجی؛ کوشیار؛ و...، جا های مختلف).

۳. نظام عددنویسی شصتگانی خالص، که در آن اعداد با حروف ابجد نوشته می‌شد و مورد استفاده منجمان بود (برای نمونه نک. قربانی، کاشانی نامه، ص ۸۶-۹۲؛ کینگ، pp. 317 - 323, 405 - 417).

ظاهراً نخستین مسلمان که در موضوع حساب شصتگانی خالص مطالبی نوشته،

1. Berggren

2. Heath

کوشیار بن لبان گیلانی یا جیلی (قرن ۴ ق) است (قربانی، کاشانی نامه، ص ۸۶). وی کتابی تحت عنوان *فی اصول حساب الهند* در حدود ۳۹۰ ق تألیف کرده (*دائرة المعارف اسلام*، ذیل "ILM AL-HISAB")، که مقاله دوم آن را به این نوع حساب اختصاص داده است (قربانی، همانجا). از بین آثار مهم دیگر به جا مانده از دوره اسلامی که بخشی از آنها به حساب شصتگانی اختصاص دارد، می توان از *الفصول فی الحساب الهندی*، تألیف اقلیدسی (حدود سال ۳۴۱ ق در دمشق)؛ *الکافی فی الحساب*، از کرجی (متوفی ۴۱۹ ق)؛ *التکملة فی الحساب* از ابومنصور بغدادی (متوفی ۴۲۹ ق)؛ و *مفتاح الحساب* تألیف غیاث الدین جمشید کاشانی (متوفی ۸۳۲ ق) نام برد.<sup>۱</sup>

### ویژگی های رساله فی البرهان علی الضرب و القسمة

رساله ای که ترجمه فارسی و متن عربی آن در پی می آید، به عقیده استاد ابوالقاسم قربانی اثری است از شرف الدین طوسی<sup>۲</sup>، با عنوان *رساله فی البرهان علی الضرب و*

۱. لازم به ذکر است که کتاب حساب محمد بن موسی خوارزمی (متوفی ۲۱۰ ق) نخستین اثر دوره اسلامی در موضوع حساب هندی به شمار می رود. اصل این کتاب به دست ما نرسیده، ولی ترجمه های لاتین آن مربوط به قرن ۱۲ میلادی، موجود است و چاپ های متعددی از روی آن ها صورت گرفته است (*دائرة المعارف اسلام*، ذیل "ILM AL-HISAB"). بخشی از این کتاب نیز به حساب شصتگانی اختصاص دارد.

۲. این رساله را مرحوم ابوالقاسم قربانی از آن شرف الدین طوسی دانسته و نام آن را در کتاب *زندگی نامه ریاضی دانان دوره اسلامی*، ذیل شرح حال شرف الدین طوسی ذکر کرده است؛ با این استدلال که شرف الدین طوسی را گاه شرف الدین مسعودی نیز نامیده اند (قربانی، *زندگی نامه*، ص ۲۷۷)، و این که نام مؤلف در ابتدای نسخه خطی "شرف الملة و الدین المسعودی" نوشته شده است (قربانی، همان، ص ۲۸۰، پانویس)؛ اما به نظر نگارنده این دلیل کافی به نظر نمی رسد، زیرا در اولین رساله موجود در همین مجموعه ۶۹۱۱، از چغمینی، و به خط کاتب همین رساله مورد بررسی، چنین نوشته شده:

« قال الإمام الأجل البارع، شرف الملة و الدین، مجد الإسلام، محمود بن محمد الجغمینی، رحمه الله . . . »

لذا به نظر می رسد که در این جا عنوان "شرف الملة و الدین" لقبی مشخص برای شرف الدین طوسی (مسعودی) نیست و کاتب آن را برای احترام به کار برده است.

به نظر داور دوم مقاله، این رساله به احتمال زیاد از آن شرف الدین است، چرا که در میان ریاضی دانان دوره اسلامی شخص دیگری با نام مسعودی نمی شناسیم، از این گذشته قرائن حاکی از آن است که مؤلف خود فرد صاحب نامی بوده که بخشی از اثر بغدادی را تحلیل کرده است. ←

القسمه فی النوع الثالث المذكور فی هذا الكتاب که منظور از " النوع الثالث المذكور فی هذا الكتاب " ، بخش حساب شصتگانی از کتاب التکملة فی الحساب تألیف ابومنصور بغدادی است. این رساله، بخشی (چهار صفحه‌ای) از نسخه خطی شماره ۶۹۱۱ کتابخانه مرکزی دانشگاه تهران را تشکیل می‌دهد. نسخه مذکور، مجموعه‌ای است شامل هفت رساله، که سومین آن‌ها کتاب التکملة فی الحساب، و چهارمین، همین رساله مطروح در این مقاله است که در رجب سال ۶۷۲ ق کتابت شده است.

### ترجمه متن رساله

رساله‌ای درباره استدلال بر ضرب و تقسیم نوع سوم مذکور در این کتاب<sup>۱</sup> این رساله را که در باب حساب درجه، دقیقه، ثانیه، . . . می‌باشد، پیشوا و استاد ارجمند و بزرگوار، شرف الملة و الدین مسعودی - خدا او را ببخشاید - تصنیف نموده است.

بدان که نسبت یک به هریک از طرفین ضرب برابر با نسبت عدد دیگر به حاصل ضرب است؛ بنابراین اگر سه را در چهار ضرب کنیم دوازده به دست می‌آید، و نسبت یک به سه برابر با نسبت چهار به دوازده است. حال که این را دانستی می‌گوییم اگر یکی از طرفین ضرب از مرتبه درجه باشد، مرتبه حاصل ضرب همانند مرتبه عدد دیگر خواهد بود؛ زیرا نسبت یک به درجه برابر است با نسبت هرچیز به مثل آن، که در این صورت نسبت عدد دیگر به حاصل ضرب برابر می‌شود با نسبت هرچیز به مثل آن، که لازمه اش یکسانی مرتبه عدد دیگر با حاصل ضرب خواهد بود. بنابراین حاصل ضرب درجه در درجه از مرتبه درجه می‌باشد، و [حاصل ضرب درجه] در دقیقه از مرتبه دقیقه، و [حاصل ضرب درجه] در ثانیه از مرتبه ثانیه است و سایر مراتب نیز بر همین قیاس خواهد بود. و [نیز] حاصل ضرب دقیقه در دقیقه، ثانیه خواهد شد؛ چون نسبت

---

به هر حال فعلاً به دلیل موجود نبودن نسخه‌ی دیگری از این اثر، اثبات یا رد قطعی این انتساب امری دشوار است.

۱. منظور کتاب التکملة فی الحساب تألیف ابومنصور عبدالقاهر بن طاهر بغدادی است.

یک به دقیقه همانند نسبت دقیقه به حاصل ضرب است و بدین ترتیب حاصل ضرب از مرتبه ثانیه می‌باشد. و [نیز] حاصل ضرب دقیقه در ثانیه از مرتبه ثالثه می‌باشد؛ زیرا نسبت واحد، یعنی درجه، به دقیقه مثل نسبت ثانیه به ثالثه است. و نیز بنا بر قواعد نسبت، حاصل ضرب دقیقه در ثالثه از مرتبه رابعه می‌باشد. و قاعده این است که هم نام [مرتبه] مضروب را بر هم نام [مرتبه] مضروب فیه بیفزاییم، تا همنام<sup>۱</sup> مرتبه حاصل ضرب به دست آید؛ و از طریق جدول زیر می‌توانیم همه آن چه را گفتیم دریابیم:

عاشره	تاسعه	ثامنه	سابعه	سادسه	خامسه	رابعه	ثالثه	ثانیه	دقیقه	درجه
	عاشره	تاسعه	ثامنه	سابعه	سادسه	خامسه	رابعه	ثالثه	ثانیه	دقیقه
		عاشره	تاسعه	ثامنه	سابعه	سادسه	خامسه	رابعه	ثالثه	ثانیه
			عاشره	تاسعه	ثامنه	سابعه	سادسه	خامسه	رابعه	ثالثه
				عاشره	تاسعه	ثامنه	سابعه	سادسه	خامسه	رابعه
					عاشره	تاسعه	ثامنه	سابعه	سادسه	خامسه
						عاشره	تاسعه	ثامنه	سابعه	سادسه
							عاشره	تاسعه	ثامنه	سابعه
								عاشره	تاسعه	ثامنه
									عاشره	تاسعه
										عاشره

### فصلی در تقسیم

بدان که نسبت مقسوم به مقسوم علیه برابر نسبت خارج قسمت به یک است. غرض از تقسیم، تعیین سهم یک شخص از مال مقسوم است؛ بنابراین اگر مالی که بناست تقسیم شود دوازده درهم و مقسوم علیه چهار نفر باشد، مراد از عمل تقسیم تعیین بهره هر یک از چهار نفر، از دوازده درهم می‌باشد که عبارتست از سه درهم. پس نسبت دوازده به چهار برابر می‌شود با نسبت خارج قسمت، یعنی سه به یک، و نسبت دوازده به سه برابر می‌گردد با نسبت چهار به یک. بدین ترتیب در تقسیم دوازده به چهار، چهار قسمت متساوی در نظر گرفته، به هر یک بهره‌ای یکسان می‌دهیم که عبارتست از سه. حال که

۱. معادل عربی: سمی.



حقیقت تقسیم را دریافتیم، می‌گوییم خارج قسمت تقسیم درجه بر درجه، [از مرتبه] درجه خواهد بود؛ زیرا نسبت درجه به درجه برابر است با نسبت هر چیز به مثل آن، بنابراین [مرتبه] خارج قسمت همانند [مرتبه] یک می‌شود. و آن [یعنی خارج قسمت] زمانی یک بار مرفوع [یک مرتبه بالاتر از درجه] می‌شود که مثلاً چهار درجه را بر دو دقیقه تقسیم کنیم؛ که در این صورت شکل صوری تقسیم عبارتست از تقسیم چهار بر دو، و خارج قسمت صوری نیز عدد دو خواهد بود، و لازم است بدانیم عدد دو از چه مرتبه‌ای است. پس می‌گوییم مرتبه مقسوم یک بار از مرتبه مقسوم علیه بالاتر است، بنابراین مرتبه خارج قسمت [نیز] یک بار بالاتر از مرتبه یک می‌شود؛ که در این صورت خارج قسمت شصت برابر یک می‌گردد، بدین ترتیب اگر خارج قسمت را بر شصت تقسیم کنیم، حاصل [از مرتبه] یک خواهد بود، و همین است معنای سخن ما مبنی بر این که در این جا خارج قسمت یک بار مرفوع می‌شود. و [نیز] خارج قسمت تقسیم درجه بر ثانیه، دو بار مرفوع می‌گردد؛ زیرا نسبت درجه مقسوم به ثانیه مقسوم علیه برابر است با نسبت خارج قسمت به یک، بدین ترتیب [مرتبه] خارج قسمت، دو بار بالاتر از [مرتبه] یک، و به عبارت دیگر، دو بار مرفوع می‌شود. و بر همین قیاس خارج قسمت تقسیم دقیقه بر ثانیه، یک بار مرفوع می‌شود؛ زیرا نسبت دقیقه به ثانیه برابر است با نسبت خارج قسمت به یک، پس خارج قسمت شصت برابر یک، و به عبارت دیگر، یک بار مرفوع می‌گردد. و قاعده آن [یعنی تقسیم] این است که اگر مقسوم و مقسوم علیه هم مرتبه باشند، خارج قسمت از مرتبه درجه خواهد بود، زیرا آن [یعنی خارج قسمت] با یک، هم مرتبه است؛ و اگر مرتبه مقسوم بالاتر از مرتبه مقسوم علیه باشد، خارج قسمت در مرتبه‌ای بالاتر از یک قرار گرفته، مرفوع می‌گردد، پس اگر [مرتبه مقسوم] یک بار بالاتر از [مرتبه] مقسوم علیه باشد، خارج قسمت [نیز] یک بار مرفوع می‌گردد؛ و اگر دو بار بالاتر باشد، خارج قسمت [نیز] دو بار مرفوع می‌شود. پس دفعات مرفوع شدن ها [بالا رفتن مرتبه‌ها] برابر است با عدد [اختلاف] مراتب [مقسوم و مقسوم علیه]؛ ولی اگر مرتبه مقسوم پایین تر از مرتبه مقسوم علیه باشد، خارج قسمت در مرتبه‌ای پایین تر از یک قرار می‌گیرد، حال اگر [مرتبه مقسوم] یک بار پایین تر باشد، خارج قسمت [از مرتبه] دقیقه خواهد بود، و اگر دو بار [پایین تر

باشد، خارج قسمت [از مرتبه] ثانیه خواهد بود، و به همین ترتیب ادامه می یابد. هر مرتبه‌ای که بر درجه تقسیم گردد، خارج قسمت از همان مرتبه خواهد بود؛ و خارج قسمت تقسیم درجه بر درجه، [از مرتبه] درجه؛ و [خارج قسمت] تقسیم درجه بر دقیقه، یک بار مرفوع؛ و [خارج قسمت تقسیم درجه] بر ثانیه، دو بار مرفوع می‌باشد، و به همین ترتیب خواهد بود سایر موارد.

اسطر اول و اولین ستون سمت راست جدول زیر به ترتیب نشانگر مرتبه مقسوم و مقسوم علیه است، و محل تلاقی امتداد مرتبه‌های مقسوم و مقسوم علیه، مرتبه خارج قسمت را مشخص می‌کند.

### مقسوم

تاسعه	ثامنه	سابعه	سادسه	خامسه	رابعه	ثالثه	ثانیه	دقیقه	
ثوامن	سوابع	سوادس	خوامس	روابع	ثوالت	ثوانی	دقائق	درج	دقیقه
سوابع	سوادس	خوامس	روابع	ثوالت	ثوانی	دقائق	درج	یک بار مرفوع	ثانیه
سوادس	خوامس	روابع	ثوالت	ثوانی	دقائق	درج	یک بار مرفوع	دو بار	ثالثه
خوامس	روابع	ثوالت	ثوانی	دقائق	درج	یک بار مرفوع	دو بار	سه بار	رابعه
روابع	ثوالت	ثوانی	دقائق	درج	یک بار	دو بار	سه بار	چهار بار	خامسه
ثوالت	ثوانی	دقائق	درج	یک بار	دو بار	سه بار	چهار بار	پنج بار	سادسه
ثوانی	دقائق	درج	یک بار	دو بار	سه بار	چهار بار	پنج بار	شش بار	سابعه
دقائق	درج	یک بار	دو بار	سه بار	چهار بار	پنج بار	شش بار	هفت بار	ثامنه
درج	یک بار	دو بار	سه بار	چهار بار	پنج بار	شش بار	هفت بار	هشت بار	تاسعه

مقسوم علیه

### بررسی محتوای رساله

عنوان رساله به خوبی نشان می‌دهد که هدف از نگارش آن، بیان استدلالی بر روش ضرب و تقسیم شصتگانی بوده است. در این جا سعی شده با نوشتن مراحل اثبات به زبان ریاضی امروز، مبانی آن مورد بررسی قرار گیرد. در بخش ضرب، طوسی سعی کرده با تبیین مفهوم تناسب<sup>۱</sup> به کمک یک مثال عددی، از آن برای بیان لزوم هم‌ارز بودن طرفین یک تساوی از نظر واحد، بهره‌گیرد. مراحل اثبات را می‌توان به صورت زیر نشان داد:

۱. بیان مفهوم تناسب در حالت کلی:

$$\forall a, b, c: a \times b = c \Rightarrow \frac{1}{a} = \frac{b}{c} \vee \frac{1}{b} = \frac{a}{c}$$

۲. مثال عددی

$$3 \times 4 = 12 \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{4}{12}$$

۳. حکم فرعی اول

$$(a. 6^\circ) \times (b. 6^\circ) = c. 6^\circ$$

۴. اثبات حکم فرعی اول

$$\frac{1}{a \times 6^\circ} = \frac{1 \times 6^\circ}{a \times 6^\circ} = \frac{b \times 6^\circ}{c \times 6^\circ} \Rightarrow x = i$$

۱. برای به دست آوردن تصویری مناسب از مفهوم تناسب (نسبت) در آثار قدما، نک: کرجی، ص ۵۸-۹۸؛ کرجی در باب ۱۵، از فصل اول این کتاب که به حساب انگشتی اختصاص دارد، به تعریف مفهوم کلی "نسبت" می‌پردازد (کرجی، ص ۵۸). سپس در باب‌های متعددی انواع نسبت را شرح می‌دهد. در این جا برای نمونه قسمتی از باب ۲۵ را که با موضوع بحث مرتبط است، عیناً نقل می‌شود (کرجی، ص ۸۶):  
 «باب نسبة أجزاء الدرج إليها، و هذا أيضاً فرع من فروع ذلك الأصل. اعلم أن الدرجة ستون دقيقة. و الدقيقة ستون ثانية. و الثانية ستون ثالثة. و الثالثة ستون رابعة و ينقسم على هذا إلى الخوامس و السوادس و الثامن و التوسع و العواشر، و ما بعدها من حوادی عشر و ما يتلوها إلى ما نهاية له فعلى هذا تكون الدقيقة من الدرجة، سدس عشرها، و كذلك الثانية من الدقيقة، و الثالثة من الثانية، و كل جزء من مرتبة...»

۵. حکم فرعی دوم

$$(a \cdot 60^{-1}) \times (b \cdot 60^{-1}) = c \cdot 60^{-2}$$

۶. اثبات حکم فرعی دوم

$$\frac{1}{a \times 60^{-1}} = \frac{1 \times 60^0}{a \times 60^{-1}} = \frac{b \times 60^{-1}}{c \times 60^x} \Rightarrow -1 - x = 0 - (-1) \Rightarrow x = -2$$

وی پس از طرح دو حکم فرعی دیگر و اثبات آن‌ها به روش فوق، قاعده کلی ضرب شصتگانی را بیان می‌نماید؛ یعنی حکم کلی را با استفاده از تعمیم احکام فرعی نتیجه می‌گیرد.<sup>۱</sup> این قاعده کلی، دقیقاً به همان صورت که بغدادی در بخش ضرب شصتگانی کتاب التکملة ذکر کرده، آمده است:

همنام مرتبه حاصل ضرب = همنام مرتبه مضروب فيه + همنام مرتبه مضروب

همنام مرتبه‌های درجه، دقیقه، ثانیه، ثالثه و ...، به ترتیب ۰، ۱، ۲، ۳ و ... است، که به خوبی وجه تسمیه "همنام" را نشان می‌دهد.

این قاعده کمابیش به همین صورت در آثار ریاضیدانان مسلمان دیگری چون اقلیدسی (ص ۱۲۴)، کرجی (ص ۱۱۳) و کاشانی (مفتاح الحساب، ص ۶۷، به نقل از قربانی، کاشانی نامه، ص ۹۶) بیان شده است. کوشیارگیلانی (ص ۵۳) نیز بدون ارائه

۱. ارسطو بر آن بود که تعمیم‌های راجع به صور، به وسیله استقراء از تجربه حسی گرفته می‌شوند. او دو نوع استقراء را مورد بحث قرار داد. اولین نوع استقراء، شمارش ساده (simple enumeration) است. در یک استدلال استقرائی با روش شمارش ساده، مقدمات و نتیجه شامل عبارات توصیفی واحدی است. نمونه یک استدلال استقرائی با روش شمارش ساده، چنین است (لازی، ص ۷-۸):

$a_1$  خاصه P را داراست.

$a_2$  خاصه P را داراست.

$a_3$  خاصه P را داراست.

∴ همه a ها خاصه P را دارا هستند.

مقایسه مطلب فوق با روش استدلال طوسی، نشان می‌دهد که وی در استدلال خویش، روش استقراء ارسطویی نوع اول را به کار بسته است.

۲. کرجی هم العددالسمی به کار برده: «العدد السمی لمرتبه المضروب» (کرجی ص ۱۱۳)

قاعده به صورت یک عبارت کلی، به کمک جدول به تفهیم قاعده ضرب شصتگانی پرداخته است.

قاعده ضرب شصتگانی، مشابه قاعده امروزی ضرب دو عدد با پایه یکسان و توان‌های متفاوت است:

$$a^i \times a^j = a^{i+j}$$

قاعده امروزی ضرب دو عدد توان دار

$$(a \cdot 60^{-i}) \times (b \cdot 60^{-j}) = c \cdot 60^{-(i+j)}$$

قاعده کلی ضرب شصتگانی

که در رابطه دوم،  $i$  و  $j$ ، بیانگر همنام مرتبه مضروب و مضروب فیه است.

نکته قابل توجه این که قاعده ضرب، برای مراتب بالاتر از درجه بیان نشده است؛ زیرا اگر بنا بود همین قاعده در مورد مراتب بالاتر از درجه نیز صدق کند، لازم می شد مثلاً تفاوت بین هم نام مرتبه ثانیه با هم نام مرتبه دو بار مرفوع مشخص گردد، که ما امروز می دانیم تفاوت آن دو در علامت آنهاست. در حالی که بیان همین قاعده به نحوی کامل تر در مفتاح الحساب، به وضوح نشان می دهد کاشانی این تفاوت را دریافته است؛ هرچند وی نیز همنام مراتب دقیقه و یک بار مرفوع را عدد یک می داند (قربانی، کاشانی نامه، ص ۹۶). کاشانی می نویسد: «هنگام ضرب دو عدد مفرد<sup>۱</sup> در یکدیگر، اگر هر دو در یک طرف درجه واقع باشند، اعداد مراتب<sup>۲</sup> آن‌ها را با هم جمع می کنیم، که در این صورت، مجموع برابر است با عدد مرتبه ی حاصل ضرب در همان طرف. و اگر در دو طرف درجه واقع باشند، تفاضل اعداد مراتب آن‌ها را حساب می کنیم، که مقدار آن برابر است با عدد مرتبه ی حاصل ضرب، در طرفی که عدد مرتبه بزرگتر قرار داشت» (همانجا).

شرف الدین در بخش تقسیم نیز، استدلال را با بیان مفهوم تناسب، ولی این بار مطابق با عمل تقسیم، پی می گیرد:

$$\forall a, b, c : a \div b = c \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{1}$$

۱. عددی که فقط شامل یک مرتبه از مراتب شصتگانی باشد؛ در مقابل عدد مرکب (قربانی، کاشانی نامه، ص ۹۰).

۲. معادل دیگری برای "همنام مراتب"

سپس مؤلف مانند بخش قبل با ذکر یک مثال عددی، به تبیین مفهوم تقسیم و رابطه فوق می پردازد. گام های بعدی وی، در این بخش نیز بیان احکام فرعی و اثبات آنها، و در نهایت قاعده کلی است. علت مفصل تر بودن این بخش نسبت به بخش قبل، احتمالاً دشوارتر بودن تقسیم در مقایسه با ضرب، و نیز وارد شدن مراتب بالاتر از درجه در عمل تقسیم باشد.

مؤلف برای بیان تقسیم، سه حالت در نظر می گیرد:

۱. مقسوم و مقسوم علیه، هم مرتبه باشند. در این حالت، خارج قسمت از مرتبه درجه خواهد بود.
  ۲. مرتبه مقسوم بالاتر از مرتبه مقسوم علیه باشد. در این صورت، خارج قسمت به اندازه اختلاف مرتبه مقسوم و مقسوم علیه، مرفوع می شود.
  ۳. مرتبه مقسوم پایین تر از مرتبه مقسوم علیه باشد، که در این حالت، خارج قسمت کوچک تر از یک می شود، و مرتبه آن را اختلاف مرتبه مقسوم و مقسوم علیه، مشخص می کند.
- قاعده تقسیم در آثار دیگر ریاضی دانان مسلمان مانند کرجی (ص ۱۱۴) و اقلیدسی (ص ۱۲۷) نیز آمده است. گیلانی (ص ۵۵) نیز با ارائه جدول به طور ضمنی قاعده را بیان کرده است.

### نتیجه گیری

چنین به نظر می رسد که اهتمام برخی از ریاضیدانان مسلمان از قبیل طوسی (مؤلف رساله مورد بررسی) در تبیین عقلی مفاهیمی چون روش ضرب و تقسیم شصتگانی، سهم بزرگی در ابداع و به کارگیری آگاهانه کسرهای اعشاری در محاسبات ریاضی و نجوم توسط ریاضیدانان بعدی مانند کاشانی داشته است. بنابراین شایسته است که تأثیر این رساله در تکامل علم حساب به ویژه رواج کسرهای اعشاری به جای کسرهای شصتگانی، مطالعه و بررسی شود.

### منابع

اسمیت، دیوید یوجین، تاریخ ریاضیات، ترجمه غلام حسین صدیقی افشار، جلد اول،

تهران، ۱۳۵۶ ش.

اقلیدسی، ابوالحسن، احمد بن ابراهیم، *الفصول فی الحساب الهندی*، چاپ احمد سعیدان، عمان، ۱۹۷۳ م.

برگرین، جی. ال.، *گوشه‌هایی از ریاضیات دوره اسلامی*، ترجمه محمد قاسم وحیدی و علیرضا جمالی، تهران، چاپ دوم، ۱۳۷۴ ش.

بغدادی، ابومنصور، *التکملة فی الحساب*، نسخه خطی شماره ۶۹۱۱ کتابخانه مرکزی دانشگاه تهران.

رنان، کالین ا.، *تاریخ علم کمبریج*، ترجمه حسن افشار، تهران، چاپ سوم، سال ۱۳۸۲ ش.

سعیدان، احمد سعید، «الأعداد و علم الحساب»، *موسوعة تاریخ العلوم العربی، الجزء الثانی*، بیروت، چاپ اول، ۱۹۹۷ م.

قربانی، ابوالقاسم، *زندگینامه ریاضیدانان دوره اسلامی*، تهران، چاپ دوم، ۱۳۷۵ ش.  
همو، *کاشانی نامه*، احوال و آثار غیاث الدین جمشید کاشانی، تهران، چاپ دوم، ۱۳۶۸ ش.  
همو، *نسوی نامه*، تحقیق در آثار ریاضی علی بن احمد نسوی، تهران، چاپ دوم، ۱۳۷۰ ش.  
کرجی، ابوبکر، محمد بن حسن، *الکافی فی الحساب*، شرح و تحقیق از سامی شلهوب، ۱۹۸۶ م.

گیلانی، کوشیار، *اصول حساب هندی*، ترجمه محمد باقری، تهران ۱۳۶۶ ش.  
لازی، جان، *درآمدی تاریخی به فلسفه علم*، ترجمه علی پایا، تهران، ۱۳۶۲ ش.  
نویگه باور، اوتو، *علوم دقیق در عصر عتیق*، ترجمه همایون صنعتی زاده، تهران، چاپ اول، ۱۳۷۵ ش.

هیث، تامس لیتل، *تاریخ ریاضیات یونان*، ترجمه احمد آرام، تهران، چاپ اول، ۱۳۸۱ ش.

King, D. A., *Islamic Mathematical Astronomy*, Hampshire, 1993.

Smith, Karl J., *Nature of Mathematics*, Clifornia, 2003.

Sarton, G., *A History of Science*, Harvard, 1952.

O'Connor, J. J. and Robertson, E. F., "*Babylonian numerals*",  
[http://www.gap.dcs.stand.ac.uk/~history/HistTopics/Babylonian\\_numerals.html](http://www.gap.dcs.stand.ac.uk/~history/HistTopics/Babylonian_numerals.html) (Website of University of St. Andrews, Scotland),  
December 2000.

*THE ENCYCLOPAEDIA OF ISLAM*, 2<sup>nd</sup> edition, s.v. "ILM AL-HISAB", By A. I. Sabra, Leiden, 1986



## پیوست

رسالة في البرهان على الضرب و القسمة في النوع الثالث المذكور في هذا الكتاب<sup>١</sup> الذي هو في حساب الدرج و الدقائق و الثواني إلى آخره، أنشأها الإمام الأجل الكبير الأستاذ شرف الملة و الدين المسعودي رحمه الله

إعلم أن نسبة الواحد إلى أحد عددي الضرب كنسبة العدد الآخر إلى الحاصل، فإننا إذا ضربنا الثلاثة في الأربعة حصل إثني عشر، و نسبة الواحد إلى الثلاثة كنسبة الأربعة إلى إثني عشر. و إذا عرفت هذا فنقول إذا كان أحد عددي الضرب درجاً، كان الحاصل من مرتبة العدد الآخر؛ لأن نسبة الواحد إلى الدرج نسبة الشيء إلى مثله، فيلزم أن يكون نسبة العدد الآخر إلى الحاصل نسبة الشيء إلى مثله، فيلزم أن يكون العدد الآخر مثل الحاصل. ف ضرب الدرج في الدرج درج، و في الدقائق دقائق، و في الثواني ثواني و على هذا القياس. و ضرب الدقائق في الدقائق ثواني؛ لأن نسبة الواحد إلى الدقائق كنسبة الدقائق إلى الحاصل، فيكون الحاصل ثواني. و ضرب الدقائق في الثواني ثوالت؛ لأن نسبة الواحد اعني الدرجة إلى الدقيقة، كنسبة الثانية إلى الثالثة. و كذلك ضرب الدقائق في الثوالت روابع، لما عرف من النسبة. و الضابط أن نجمع سميّ المضروب إلى سميّ المضروب فيه، فما بلغ فهو سميّ مرتبة الحاصل، و نعرف جميع ما ذكرنا في هذا الجدول.

## فصل في القسمة

إعلم أن نسبة المقسوم إلى المقسوم عليه كنسبة الخارج إلى الواحد. فإن المطلوب بالقسمة طلب نصيب الشخص الواحد من المال المقسوم، فإذا كان المال المقسوم اثنا عشر درهماً و المقسوم

عاشرة	تاسعة	ثامنة	سابعة	سادسة	خامسة	رابعة	ثالثة	ثانية	دقيقة	درجة
	عاشرة	تاسعة	ثامنة	سابعة	سادسة	خامسة	رابعة	ثالثة	ثانية	دقيقة
		عاشرة	تاسعة	ثامنة	سابعة	سادسة	خامسة	رابعة	ثالثة	ثانية
			عاشرة	تاسعة	ثامنة	سابعة	سادسة	خامسة	رابعة	ثالثة
				عاشرة	تاسعة	ثامنة	سابعة	سادسة	خامسة	رابعة
					عاشرة	تاسعة	ثامنة	سابعة	سادسة	خامسة
						عاشرة	تاسعة	ثامنة	سابعة	سادسة
							عاشرة	تاسعة	ثامنة	سابعة
								عاشرة	تاسعة	ثامنة
									عاشرة	تاسعة
										عاشرة

عليه أربعة اشخاص، فيطلب بالقسمة معرفة ما يخص كل واحد من الأربعة من الإثنى عشر، وهو ثلاثة. فيكون نسبة إثنى عشر إلى الأربعة كنسبة الخارج وهو ثلاثة إلى الواحد، و يكون نسبة إثنى عشر إلى الثلاثة كنسبة الرابعة إلى الواحد. فإننا في قسمة الإثنى عشر على الأربعة نجعل أربعة اقسام متساوية، فيدفع إلى كل واحد قسماً واحداً، وهو ثلاثة. وإذا عرفنا حقيقة القسمة فنقول أن الخارج من القسمة الدرج على الدرج، درج؛ لأن نسبة الدرج إلى الدرج نسبة الشيء إلى مثله، فيكون الخارج من القسمة مثل الواحد. وهو درج مرفوع مرة واحدة مثل أن نقسم أربع درجات على دقيقتين فإن صورة القسمة هي قسمة أربعة على الإثنى عشر والخارج من قسمة الصورة إثنان، ونحتاج إلى أن نعلم إنهما من أي مرتبة. فنقول رتبة المقسوم فوق رتبة المقسوم عليه بمرة واحدة، فتكون رتبة الخارج فوق رتبة الواحد بمرة واحدة؛ فيكون الخارج ستين مرة مثل الواحد، فإذا قسمنا الخارج على ستين فنخرج من القسمة واحد، فهذا معنى قولنا أن الخارج من القسمة هنا درج مرفوعة مرة. و يكون الخارج من القسمة الدرج

على الثوانى درج مرفوعة مرتين؛ لأن نسبة الدرّج المقسوم إلى الثوانى المقسوم عليه كنسبة الخارج إلى الواحد، فيكون الخارج فوق الواحد بمرتين، فيكون درجاً مرفوعاً بمرتين. و على هذا القياس يكون الخارج من قسمة الدقائق على الثوانى درج مرفوعة مرة واحدة؛ لأن نسبة الدقائق إلى الثوانى كنسبة الخارج إلى الواحد، فيكون الخارج فوق رتبة الواحد بستين مرة، فيكون درجاً مرفوعة مرة واحدة. و الضابط فيه أن المقسوم و المقسوم عليه إن كانا فى رتبة واحدة، كان الخارج درجاً لأنه فى رتبة الواحد؛ و إن كان المقسوم اعلى رتبة من المقسوم عليه فالخارج أعلى رتبة من الواحد، فيكون درجاً مرفوعة، فإن كان أعلى من المقسوم عليه بمرة واحدة فيكون الخارج مرفوعاً مرة واحدة، و إن كان بمرتين فالخارج مرفوع مرتين، فمرات الرفع مثل مرات المراتب؛ و اما إن كان المقسوم أدنى رتبة من المقسوم عليه كان الخارج أدنى رتبة من الواحد، فإن كان بمرتبة واحدة فالخارج دقائق، و إن كان بمرتبتين فالخارج ثوانى و على هذا القياس. أى مرتبة قسمت على الدرّج فالخارج من هكذا المرتبة؛ و الخارج من القسمة الدرّج على الدرّج درج، و من قسمة الدرّج على الدقائق درج مرفوعة مرة واحدة، و على الثوانى مرفوع مرتين و على هذا القياس.

## مقسوم

تاسعة	ثامنة	سابعة	سادسة	خامسة	رابعة	ثالثة	ثانية	دقيقة	
ثوامن	سوابع	سوادس	خوامس	روابع	ثوالت	ثواني	دقائق	درج	دقيقة
سوابع	سوادس	خوامس	روابع	ثوالت	ثواني	دقائق	درج	مرفوع مرة	ثانية
سوادس	خوامس	روابع	ثوالت	ثواني	دقائق	درج	مرفوع مرة	مرتين	ثالثة
خوامس	روابع	ثوالت	ثواني	دقائق	درج	مرفوع مرة	مرتين	ثلاث مرات	رابعة
روابع	ثوالت	ثواني	دقائق	درج	مرة	مرتين	ثلاث مرات	أربع مرات	خامسة
ثوالت	ثواني	دقائق	درج	مرة	مرتين	ثلاث مرات	أربع مرات	خمس مرات	سادسة
ثواني	دقائق	درج	مرة	مرتين	ثلاث مرات	أربع مرات	خمس مرات	ست مرات	سابعة
دقائق	درج	مرة	مرتين	ثلاث مرات	أربع مرات	خمس مرات	ست مرات	سبع مرات	ثامنة
درج	مرة	مرتين	ثلاث مرات	أربع مرات	خمس مرات	ست مرات	سبع مرات	ثمان مرات	تاسعة

مقسوم عليه



