تاریخ علم، پاییز ۸۲، شماره اول، ص۹-۲۵

حکیم عمر خیام نظریه پرداز معادلات درجه سوم[1]

جعفر آقایانی چاوشی[2]

چکیده

حل مسألهٔ ارشمیدس باعث گردید تا ریاضی‌دانان ایرانی به حل معادله‌ای درجه سوم که به معادلهٔ ماهانی معروف است، از طریق تقاطع مقاطع مخروطی فائق آیند. خیام در رسالهٔ *جبر و مقابلهٔ* خود حل و بحث همهٔ معادلات درجهٔ سوم را ارائه می‌دهد و با این نظریهٔ خود گام مهمی در حل این معادلات برمی‌دارد. در این مقاله نظریهٔ خیام را از نظر تاریخی و شناخت‌شناسی بررسی می‌کنیم.

کلید واژه‌ها: جبر و *مقابلهٔ* خیام، نظریهٔ معادلات درجهٔ سوم، مسألهٔ ارشمیدس، *کره و استوانه*، معادلهٔ ماهانی.

مقدمه

نظریه معادلات درجهٔ سوم حکیم عمر خیام از اهمیت ویژه‌ای در تاریخ ریاضیات برخوردار است. خیام با این نظریه، مشکلی را حل کرد که سالیانی دراز لاینحل مانده بود. برای درک درست نظریهٔ مبتکرانهٔ خیام، باید نخست عناصر تاریخی مرتبط با آن مطالعه شود.

---

۱. این مقاله ترجمهٔ فارسی سخنرانی نویسنده است که در *کنفرانس جهانی تاریخ ریاضیات قدیم* در شهر دلفی یونان در ۲۰ اوت ۲۰۰۰ به زبان فرانسه ایراد کرده است.

۲. پژوهشگر تاریخ و فلسفه ریاضیات و عضو هیئت علمی دانشگاه صنعتی شریف.

نظریهٔ خیام از نظر تاریخی با مسألهٔ معروف ارشمیدس پیوستگی دارد. این مسأله که در شکل چهارم از مقالهٔ دوم کتاب *کره و استوانه* این دانشمند یونانی آمده چنین است:

« کره‌ای مفروض را بوسیلهٔ صفحه‌ای چنان قطع کنید که نسبت حجم‌های دو قطعه حاصل مساوی مقدار مفروضی باشد.»

ارشمیدس این مسأله را به ساختمان هندسی زیر منجر می‌کند:

« قطعه خط $\overline{DZ}$ و نقاط B و T بر آن مفروض است B بین D و T می‌باشد، نقطه‌ای مانند X را بر $\overline{DZ}$ چنان تعیین کنیدکه: $\frac{\overline{BD}^2}{\overline{DX}^2} = \frac{\overline{XZ}}{\overline{ZT}}$ باشد.»

گرچه ارشمیدس وعده داده بود که راه حل این ساختمان هندسی را در آخرین بخش از کتاب *کره و استوانه* خود ارائه دهد، ولی چنین ترسیمی در این کتاب یافت نمی‌شود. گویا از همان دوران باستان، این ترسیم ارشمیدس مفقود گردیده است.

با این حال اطوقیوس عسقلانی ریاضی‌دان یونانی عهد باستان و یکی از شارحان آثار ارشمیدس، مدعی است که راه‌حل وی را ضمن یک نسخهٔ خطی کهن یافته و محتوای آن را مدون کرده است. این اثر یکی از جالبترین کارهای تاریخی است که یک هندسه‌دان یونانی انجام داده است.[۱] علاوه بر این راه حل، مسألهٔ فوق را دیگر هندسه دانان یونانی با روشهای گوناگون حل کرده‌اند.

در عصر زرین تمدن اسلامی، هنگامی که علوم یونانی به عالم اسلام انتقال یافت، این مسأله از نو مورد تحقیق قرار گرفت. ماهانی ریاضیدان بزرگ ایرانی در قرن دهم هجری برای اولین بار این مسألهٔ هندسی را به صورت یک معادلهٔ جبری درجه سوم به صورت زیر درآورد:

$$x^3 + c = ax^2$$

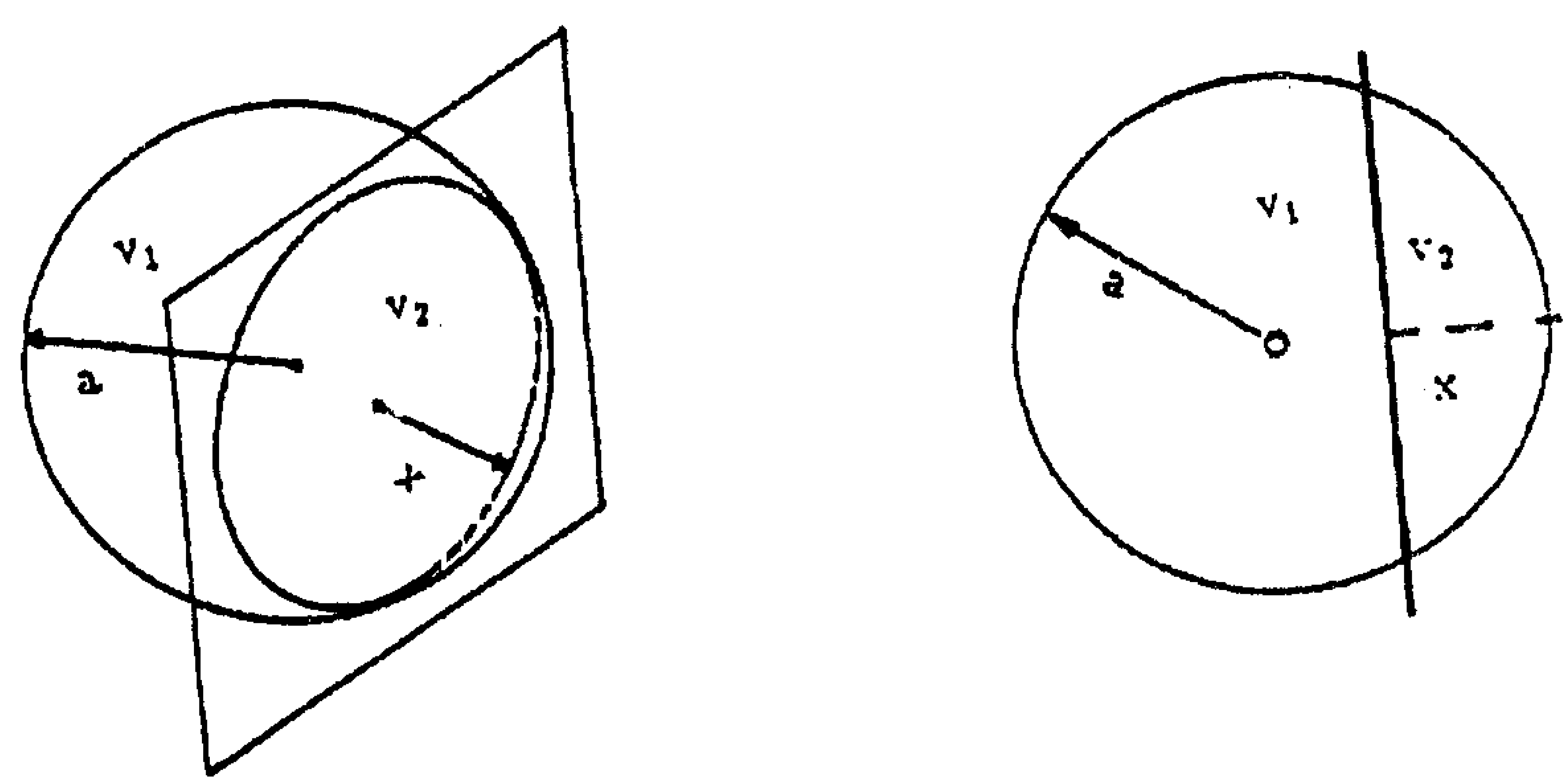
---

۱. دربارهٔ این اثر رجوع شود به:

Netz, R., «Archimedes' Trasformed: The Case of a Result Stating a Maximum for a Cubic Equation », *Archive for History of Exact Sciences,* vol. 54, (1999), pp. 1-48.

اثری که ماهانی در آن به حل مسأله ارشمیدس پرداخته به دست ما نرسیده است، اما به آسانی می‌توان دریافت که چگونه او به این معادله رسیده است.

در واقع همان طور که در شکل۱ مشاهده می‌کنیم، هر گاه کره‌ای به شعاع a را با صفحه‌ای به دو قطعهٔ V_1 و V_2 تقسیم نماییم و فرض کنیم که X ارتفاع V_2 باشد مسأله به صورت $\frac{V_1}{V_2}=\frac{m}{n}$ درمی‌آید که در آن m و n اعداد صحیح هستند.



شکل۱

رابطهٔ میان حجم و ارتفاع قطعهٔ V_2 چنین است: $V_2=\pi x^2(a-\frac{1}{3}x)$

در نتیجه حجم قطعهٔ V_1 چنین خواهد شد: $V_1=\frac{4}{3}\pi a^3-\pi x^2(a-\frac{1}{3}x)$

بنابراین باید داشته باشیم:

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{m}{n}\Rightarrow\frac{4a^3-3ax^2+x^3}{3ax^2-x^3}$$

یا

$$\frac{4a^2}{x^2}=\frac{(3a-x)(m+n)}{na}$$

از گسترش و ساده کردن رابطهٔ اخیر معادلهٔ ماهانی بدست می‌آید. گرچه ماهانی موفق به حل این معادله نگردید، ولی با تبدیل یک مسأله هندسی به یک مسألهٔ جبری تحولی در علم ریاضیات ایجاد کرد. این پیشرفت علمی به همین جا خاتمه نیافت، زیرا ابوجعفر خازن ریاضی‌دان دیگر ایرانی و معاصر ماهانی سرانجام توانست معادله ماهانی را با توسل به مقاطع مخروطی حل کند و مبحثی تازه بنام معادلات درجهٔ سوم در

ریاضیات بگشاید. از آن پس ریاضی‌دانان اسلامی تقسیم معینی از یک قطعه خط را رها کرده و تمام کوشش خود را روی معادلات درجهٔ سوم معطوف کردند. با این حال نه ابوجعفر خازن و نه هیچ یک از ریاضی‌دانانی که روی این موضوع کار کردند، نتوانستند نظریه‌ای علمی از معادلات درجهٔ سوم ارائه دهند. این نظریه را نخستین بار حکیم عمرخیام ریاضی‌دان و فیلسوف بزرگ ایرانی عرضه کرد. نظریهٔ خیام که این مقاله به بررسی آن اختصاص یافته، در رسالهٔ بسیار مهم *الجبر و المقابلة* او آمده است. خیام رسالهٔ خود را به ترتیب زیر تدوین کرده است:

۱. مقدمه
۲. معادله‌های خطی و معادله‌های درجه دوم
۳. معادله‌های درجه سوم
۴. معادله‌های کسری
۵. ضمیمه‌ای که به نقد کارهای ابوالجود در حل معادلات درجه سوم اختصاص دارد و خیام آن را چند سال پس از به پایان رساندن متن اصلی رسالهٔ خود، یافته است.

مقدمه شامل تعریفی است که در آن علم جبر به عنوان علم معادلات جبری معرفی گردیده است. طبق تعریف خیام « فن جبر و مقابله فنی است علمی، که موضوع آن عدد مطلق و مقادیر قابل سنجش است، از آن جهت که مجهول‌اند ولی مرتبط با چیز معلومی هستند که بوسیله آن می‌توان آنها را استخراج کرد»[1]. عدد مطلق از نظر خیام عددی است طبیعی و مقادیر قابل سنجش همانا خطوط، سطوح و اجسام هندسی سه بعدی‌اند که بطور کلی می‌توان آنها را کمیت‌های پیوسته و ناپیوسته نامید.

خیام علاوه بر توضیح مقدماتی، نکاتی را نیز دربارهٔ درجهٔ معادلات ذکر می‌کند. مثلاً می‌گوید که مجهول معادلات بالاتر از درجهٔ سوم را باید بطور مجازی در نظر گرفت، چرا که به مقادیر حقیقی مربوط نمی‌شوند. همچنین به این نکته تصریح می‌کند که معادلات

---

۱. خیام، *جبر و مقابله*، ترجمهٔ غلامحسین مصاحب در کتاب *حکیم عمر خیام به عنوان عالم جبر*، تهران، ۱۳۳۹ش، ص۲۴۱.

درجهٔ سومی را که غیرقابل تحویل به معادلات درجهٔ دوم هستند باید با مقاطع مخروطی حل کرد و حل عددی آنها یعنی یافتن ریشه‌ها بصورت رادیکال را ناشناخته می‌داند[۱]. خیام سپس طبقه‌بندی معادلات درجهٔ سوم و حل هندسی آنها را مطرح می‌کند. پس از بحث مفصلی دربارهٔ معادلات درجهٔ سوم، دربارهٔ معادلات کسری، که مجهول آنها قسمتی از چیزی و یا بخشی از مربعی و غیره باشد، به اختصار سخن می‌گوید. مانند:

$$\frac{۱}{x^۳}+۳\frac{۱}{x^۲}+۵\frac{۱}{x}=۳\frac{۳}{۸} \qquad x\neq ۰$$

خیام با انتخاب تغییر متغیر $z=\frac{۱}{x}$ آنها را به معادلاتی که قبلاً بررسی کرده منجر می‌کند. وی تأکید می‌کند روشی برای حل معادلاتی مانند $x^۲+۲x=۲+۲\frac{۱}{x^۲}$ که به معادله درجهٔ چهارم $x^۴+۲x^۳-۲x^۲-۲=۰$ منجر می‌شود، وجود ندارد. خیام با چنین بیانی کشفیات خود را در این مورد پایان می‌دهد.

نظریهٔ معادلات درجهٔ سوم

یک نظریه، هنگامی صورت علمی به خود می‌گیرد که یک فرایند و یا قانونی را در حالت کلی آن مطرح کند. علاوه بر آن باید با یکی از علوم حقیقی اثبات شود تا صورت یک علم حقیقی را به خود بگیرد. تمام این خصوصیات را در نظریهٔ معادلات درجهٔ سوم خیام می‌توان مشاهده کرد.

ارائه شکل کلی برای معادلات درجه سوم

از جنبه‌های عمومی بودن نظریهٔ خیام، این است که تمام معادلات درجهٔ سوم را به صورت کلی خود مطرح می‌کند. معادلات ارائه شدهٔ خیام به قرار زیرند:

---

۱. چهار قرن پس از خیام دو ریاضی‌دان ایتالیایی کاردان و تارتاگلیا روش یافتن ریشه‌های معادلات درجهٔ سوم از طریق جبری را کشف کردند.

۱. $x^3 = c$

۲. $x^3 + bx = c$

۳. $x^3 + c = bx$

۴. $x^3 = bx + c$

۵. $x^3 + ax^2 = c$

۶. $x^3 + c = ax^2$

۷. $x^3 = ax^2 + c$

۸. $x^3 + ax^2 + bx = c$

۹. $x^3 + ax^2 + c = bx$

۱۰. $x^3 = ax^2 + bx + c$

۱۱. $x^3 + bx + c = ax^2$

۱۲. $x^3 = ax^2 + bx + c$

۱۳. $x^3 + ax^2 = bx + c$

۱۴. $x^3 + bx = ax^2 + c$

۱۵. $x^3 + c = ax^2 + bx$

خیام بدین نحو همهٔ معادلات درجهٔ سوم را به ۱۵ نوع می‌رساند. معادلاتی که دارای ریشه‌های مثبت نیستند مورد توجه خیام قرار نگرفته‌اند، مثلاً معادلهٔ $x^3 + ax^2 + c = 0$ را در طبقه بندی خیام نمی‌بینیم. البته در ریاضیات امروزی، می‌توان معادلات (۲) و (۳) و (۴) را به صورت: $x^3 + bx + c = 0$ و معادلات (۵) و (۶) و (۷) را به صورت $x^3 + ax^2 + c = 0$ و معادلات (۸) تا (۱۵) را به شکل $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ نمایش داد.

مسألهٔ متجانس سازی

در ریاضیات جدید، ما با معادلات کاملاً عددی سروکار داریم و برای همین است که با مسألهٔ «متجانس ساختن» مواجه نمی‌شویم؛ اما خیام با کمیت‌های هندسی، که بُعد آنها معلوم است سروکار داشت. بدیهی است که نمی‌توان یک قطعه خط را با یک سطح

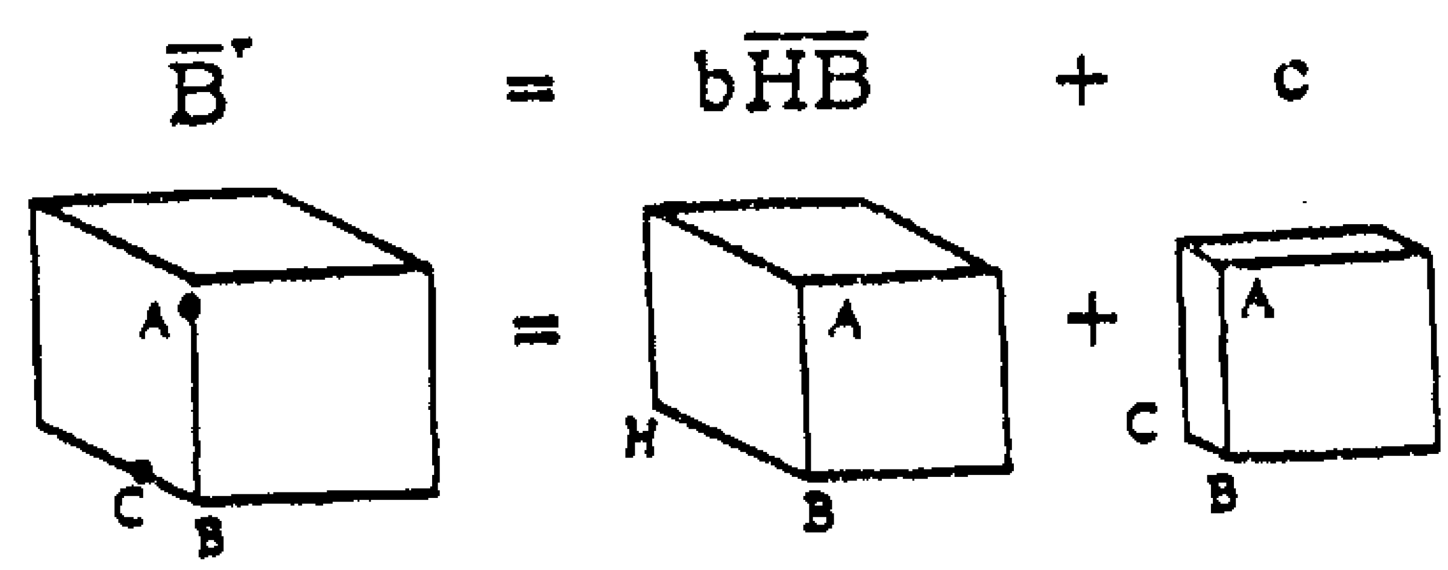
که دو بعد دارد، یا یک سطح را با یک حجم که سه بعد دارد، جمع کرد. کمیت‌ها در یک معادله باید قابل مقایسه یعنی متجانس باشند.

برای رهایی از این بن بست منطقی خیام واحد اندازه‌گیری خود را ارائه می‌کند. برای مثال هنگامی که از تساوی یک عدد با یک سطح صحبت می‌کند، منظورش از عدد مستطیلی است که یک ضلع آن مساوی واحد و عدد مزبور، ضلع دیگر این مستطیل باشد. مثلاً برای معادله $x^2 = 3$ مطابق آنچه گفتیم چنین نوشته می‌شود: $x^2 = 3\times 1$. خیام قبل از حل هر یک از معادلات درجه سوم آنها را متجانس می‌کند؛ مثلاً معادلهٔ $x^3 = bx + c$ را به صورت: $x^3 = p^2x + q^2p$ درمی‌آورد. برای فهم دقیق متجانس‌سازی، فرض می‌کنیم قطعه خط $BH = x$ مجهول معادلهٔ $x^3 = bx + c$ باشد. نیز فرض می‌کنیم $AB = \sqrt{b}$ باشد. خط BC را بر AB به صورتی عمود می‌کنیم که داشته باشیم $BC = \frac{c}{b}$. آنگاه مکعب مستطیلی را به سطح $AB.AB$ و به بُعد BC می‌سازیم. حجم این جسم برابر c است (شکل۲).

بنابراین خواهیم داشت:

$$\overline{BH}^3 = \overline{AB}^2.\overline{HB} + \overline{AB}^2.\overline{BC}$$

یا



شکل۲

حل هندسی معادلات درجهٔ سوم

خیام معادلات درجهٔ سوم را از طریق تقاطع مقاطع مخروطی حل می‌کند. در انتخاب خود از مقاطع مخروطی برای ۱۵ نوع معادله درجه سوم، خیام روش دقیقی را بکار می‌برد.

فرانتس وپکه روابط زیر را عرضه کرد تا نشان دهد که خیام چگونه از مقاطع مخروطی برای هر یک از معادلات خود استفاده کرده است.

هرگاه p، q، r، s و t نمایش‌دهندهٔ سه مقدار ۱-، ۱+ یا صفر باشند، در این صورت مقاطع مخروطی مورد نیاز خیام برای حل معادلات درجهٔ سوم از سه دستگاه زیر بدست می‌آید:

$$\mathrm{I.}\begin{cases} x^2 - \sqrt{b}y = 0 & \text{سهمی} \\ y^2 + px^2 + q\dfrac{a}{b}x = 0 & \begin{cases} p = 0 & \text{سهمی} \\ p = +1 & \text{دایره} \\ p = -1 & \text{هذلولی} \end{cases} \end{cases}$$

این دستگاه برای حل معادلات درجهٔ سوم $x^3 + pbx + qa = 0$، که صورت کلی معادلات (۲) و (۳) و (۴) خیام است، بکار گرفته می‌شود.

$$\mathrm{II.}\begin{cases} yx - \sqrt{c}m = 0 & \text{هذلولی} \\ y^2 + pmx + qm = 0 & \text{سهمی} \end{cases}$$

این دستگاه برای حل معادله $x^3 + pqax^2 + pc = 0$ (صورت کلی معادلات (۵) و (۶) و (۷) خیام) بکار گرفته می‌شود که در آن m می‌تواند برابر یا مساوی $\sqrt[3]{a}$ یا p باشد.

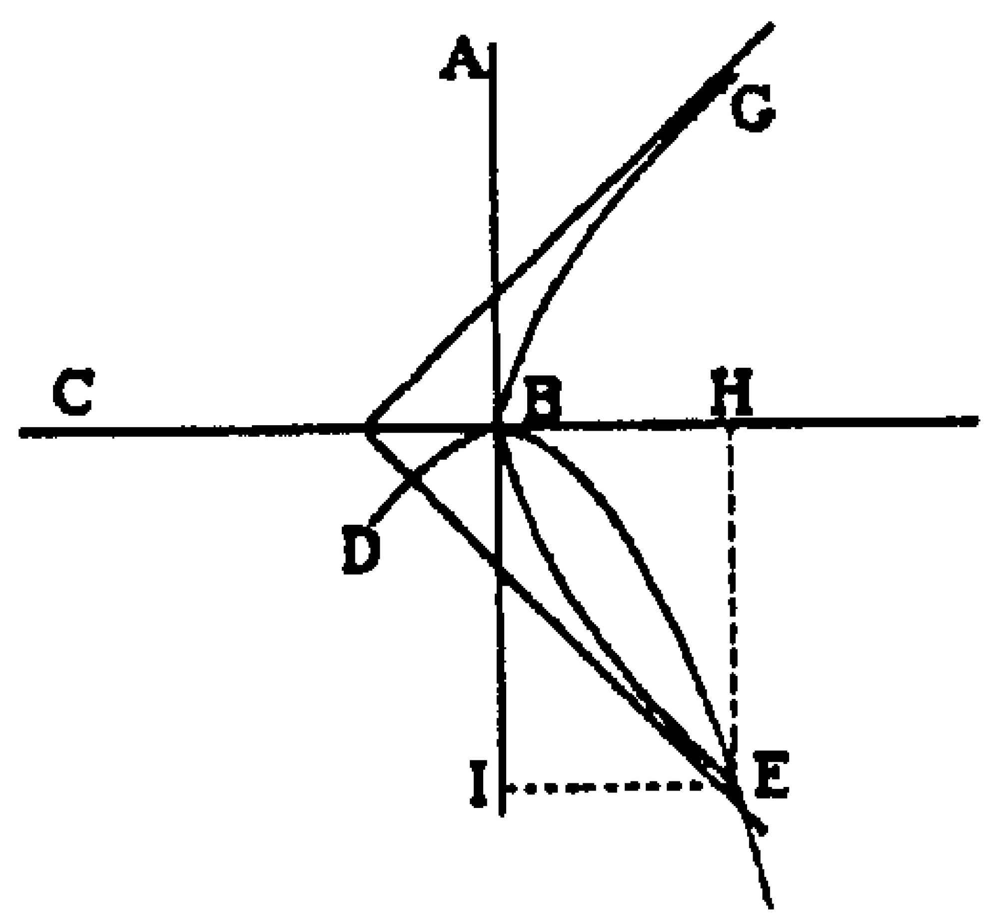
$$\mathrm{III.}\begin{cases} y^2 + px^2 + q(\dfrac{c}{b} \pm a)x + r\dfrac{ac}{b} = 0 & \begin{cases} p = +1 & \text{دایره} \\ p = -1 & \text{هذلولی} \end{cases} \\ yx + s\sqrt{b}x + t\dfrac{a}{\sqrt{b}} = 0 & \text{هذلولی} \end{cases}$$

این دستگاه برای حل معادلهٔ

$x^4 pq(\frac{c}{b} \pm a)x^3 + r(b + p\frac{ac}{b})x^2 + 2pstcx + p\frac{c^2}{b} = 0$ بکار می‌رود. پس از بخش کردن آن بر $x \pm \frac{c}{b}$، به معادلهٔ درجه سوم $x^3 + uax^2 + vbx + wc = 0$ (صورت کلی معادلات (۸) تا (۱۵) خیام) می‌رسیم که در آن u، v و w برابر ± 1 هستند.

مثلاً برای حل معادله $x^2 = bx + c$ دستگاه I ما را به هذلولی $y^2 = x^2 + \frac{c}{b}x$ و سهمی $y = \frac{x^2}{\sqrt{b}}$ راهنمایی می‌کند.

خیام سهمی EBD به رأس B و به محور AB و نیز هذلولی EBG به رأس B و محور BC را با استفاده از کتاب *مخروطات* آپولونیوس رسم می‌کند. با توجه به شکل ۳ این دو منحنی یکدیگر را در نقطهٔ E قطع می‌کنند و $BH = x$ جواب مسأله است. روشن است که خیام جواب منفی معادله را نمی‌دهد.



شکل۳

اثبات هندسی برای درستی راه حل

خیام پس از حل معادلات از طریق تقاطع مقاطع مخروطی، درستی جوابها را به کمک علم هندسه که علمی است حقیقی و در عین حال شهودی، مبرهن می‌کند تا ارزش علمی نظریهٔ خود را روشن نماید.

باز به معادله $x^2 = bx + c$ بازمی‌گردیم. خیام برای اثبات درستی جواب معادله از شکل ۳ آغاز می‌کند. نقطه E روی سهمی EBD قرار دارد، بنابراین باید در معادلهٔ این سهمی صدق کند، پس : $\overline{EI}^2 = AB.BI$ (معادله سهمی)

و چون $EI = BH$ می‌باشد پس: $\overline{BH}^2 = AB.BI$

یا $\frac{BH}{AB} = \frac{BI}{BH}$ (۱)

نقطه E روی هذلولی EBG قرار دارد، پس $\overline{EH}^2 = CH.BH$ (معادلهٔ هذلولی)

و چون $EH = BI$ می‌باشد پس:

$$\overline{BI}^2 = CH.BH$$

یا

$$\frac{CH}{BI} = \frac{BI}{BH} \qquad (۲)$$

از مقایسهٔ دو رابطهٔ (۱) و (۲) خواهیم داشت:

$$\frac{HB}{AB} = \frac{BI}{BH} = \frac{CH}{BI}$$

که از آن دو رابطهٔ زیر نتیجه می‌شود:

$$AB.BI = \overline{HB}^2 \qquad (۳)$$

$$AB.CH = HB.\ BI \qquad (۴)$$

از ضرب طرفین دو رابطه خواهیم داشت:

$$\overline{HB}^3 = \overline{AB}^2.\overline{CH}$$

از طرف دیگر:

$$CH = HB + BC$$

پس: $\overline{HB}^3 = \overline{AB}^2.\overline{HB} + \overline{AB}^2.\overline{BC} \Rightarrow \overline{HB}^3 = bHB + c$

بنابراین HB جواب مسأله است و در نتیجه درستی راه‌حل روشن می‌شود.

بحث در وجود ریشه های معادلات درجهٔ سوم

خیام پس از حل هر یک از معادلات درجهٔ سوم در عده جوابها یعنی در تعداد نقاط تقاطع، مقاطع مخروطی بحث کرده است. نتایج این بحث صرف نظر از دو خطا، همگی درست است. نخستین خطای وی هنگام بحث دربارهٔ ریشه‌های معادلهٔ $x^3 + bx = ax^2 + c$ رخ داده است. می‌دانیم که این معادله به ازای $\frac{c}{b} < a$ دارای سه ریشهٔ مثبت است؛ اما بحث خیام دربارهٔ این معادله کامل نیست. به همین دلیل است که تنها یک ریشهٔ مثبت را بدست می‌آورد. اشتباه خیام واقعاً تأسف‌بار است، زیرا او به خوبی می‌دانسته که یک معادلهٔ درجه دوم حداکثر دو ریشهٔ مثبت دارد، پس هرگاه معادلهٔ درجه سومی را کشف می‌کرد که دارای سه ریشهٔ مثبت باشد، قطعاً به کشف رابطه میان درجهٔ معادلات و تعداد ریشه نائل می‌آمد.

خطای دوم خیام به هنگام حل و بحث در ریشه‌های معادلهٔ $x^3 + c = ax^2 + bx$ رخ داده است. خیام متوجه دومین ریشهٔ مثبت این معادله نگردیده است. این اشتباه از اینجا ناشی می‌شود که او به هنگام حل معادلات تنها به ترسیم قسمتی از قطع‌های

مخروطی اکتفا می‌کند. یعنـی بـه جـای ترسیم دایـره، سـهمی و هذلولـی، بـه ترتیـب نیم‌دایره، نصف سهمی و شاخه‌ای از هذلولی را رسم می‌کند. همین عادت تأسـف‌بار او را، از شناخت ریشه‌های منفی معادلات محروم کرده است. خیام به بحث در عـده جوابـهای معادله بر حسب ضرایب آن نمی‌پردازد مگر در مـورد معـادلات $x^3 + bx + c = ax^2$ و $x^3 + c = ax^2$.

نظریهٔ خیام در ریاضیات امروزی

از نظریهٔ خیام تنها «روش حل معادلات درجهٔ سوم به کمک مقـاطع مخروطـی»، در ریاضیات امروزی به جا مانده است، اما همان طورکه قبلاً نیز اشاره شـد، خیـام در روش خود از هندسهٔ ترکیبی قدما استفاده می‌کند. حـال آنکـه هندسـهٔ تحلیلـی در ریاضیـات امروزی به ما امکان می‌دهد که همان نتایج خیام را آسان‌تر به دست آوریـم. بـه عبـارت دیگر به کمک این هندسه ما می‌توانیم همهٔ معادلات درجهٔ سوم را تنها بـه کمـک یـک دایره و یک سهمی حل کنیم. در واقع برای حل معادلهٔ $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ پس از ضرب آن در x خواهیم داشت: $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx = 0$

با استفاده از تغییر متغیر $z = x - \frac{a}{4}$ توان سوم مجهول حذف می‌شود و معادلهٔ زیر به دست می‌آید:

$$z^4 + pz^2 + qz + r = 0 \qquad (1)$$

فرض می‌کنیم:

$$z^2 = y \qquad (2)$$

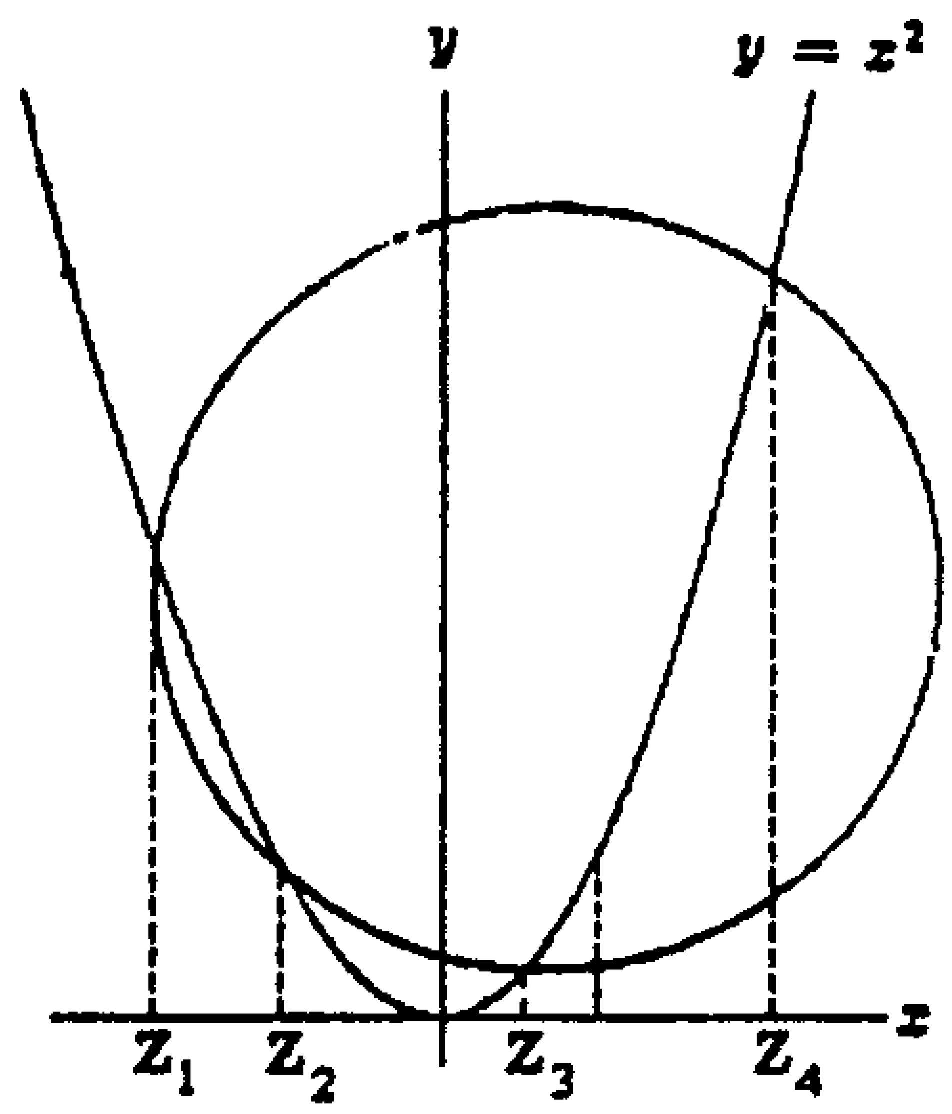
از آنجا خواهیم داشت:

$$y^2 + py + qz + r = 0 \qquad (3)$$

از جمع روابط (۲) و (۳) خواهیم داشت:

$$z^2 + y^2 + (p-1)y + qz + r = 0 \qquad (4)$$

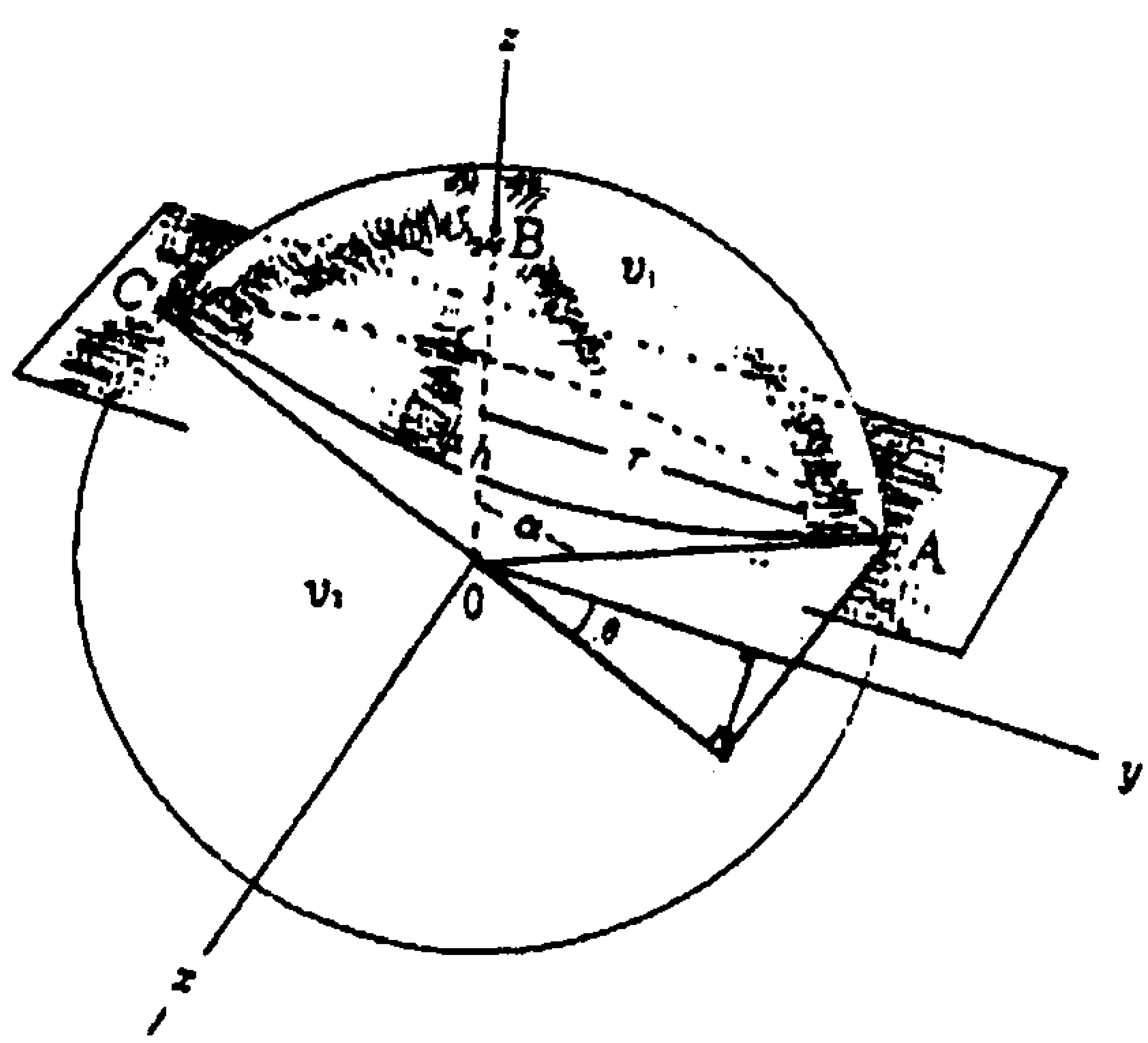
رابطهٔ (۴) معادلـهٔ دایـره‌ای اسـت بـه مرکـز $(z_0 = -\frac{q}{2}, y_0 = -\frac{p-1}{2})$ و شـعاع $R = \frac{1}{2}\sqrt{q^2 + (p-1)^2 - 4r}$. از تقاطع این دایره و سهمی (۲) ریشه‌های معادلـهٔ (۱) به دست می‌آید (شکل۴).



شکل۴

حل مسألهٔ ارشمیدس با روش خیام

پیش از این، روش خیام را برای حل معادلهٔ درجهٔ سوم با استفاده از ریاضیات جدید تشریح کردیم. اکنون این روش را برای حل مسأله ارشمیدس بکار می‌بریم. ایـن کـار را آقای امیر معز انجام داده است[1] که ما آن را با جزئیات تمام در ادامه می‌آوریم.



شکل۵

1. Amir Moez, A.R., "Khayyam, al-Biruni, Gauss, Archimedes and Quadratic Equations", *The Texas Journal of Science*, 1994, Vol. 46 (No.3), pp. 255-257.

فرض می‌کنیم کره‌ای به معادلهٔ $\rho = a$ توسط صفحهٔ $z = h$ به دو بخش V_1 و V_2 تقسیم گردیده به طوری که $\frac{V_1}{V_2} = k$. برای تعیین حجم‌های V_1 و V_2 نخست حجم بخشی از این کره را که در مخروطی به معادلهٔ $\varphi = \alpha$ محدود گردیده است، حساب می‌کنیم.

حجم این قطعه از کره را که در شکل۵ با OABC نمایش می‌دهیم، V می‌نامیم. پس خواهیم داشت:

$$V = \iiint f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

تغییر متغیری در دستگاه مختصات کروی به ما امکان می‌دهد تا این انتگرال سه‌گانه را به آسانی محاسبه نماییم.

نگاشت λ را در نظر می‌گیریم به طوری که هریک از مختصات (x,y,z) از دستگاه مختصات قائم متناظر با هر یک از مختصات (ρ,θ,φ) از دستگاه مختصات کروی باشند یعنی:

$$\lambda : \begin{cases} x = \rho \sin\varphi \cos\theta \\ y = \rho \sin\varphi \sin\theta \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases} \qquad 0 \le \rho \le a,\ \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le \varphi \le \alpha$$

این نگاشت از کلاس C^∞ در R^3 می‌باشد که ژاکوبین آن مساوی است با:

$$\Delta_\lambda(\rho,\varphi,\theta) = \begin{vmatrix} \sin\varphi\cos\theta & -\rho\sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta & \rho\cos\varphi\sin\theta \\ \cos\varphi & 0 & -\rho\sin\varphi \end{vmatrix} = \rho^2 \sin\varphi$$

بنابراین برای هر تابع پیوسته f خواهیم داشت:

$$V = \iiint f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint \Delta_\lambda(\rho,\varphi,\theta)\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{a} \int_0^{\alpha} \left|\rho^2 \sin\varphi\right| d\rho\,d\varphi\,d\theta = \int_0^{a} \rho\,d\,\rho^2 \int_0^{\alpha} \sin\varphi d\varphi \int_0^{2\pi} \theta d\theta$$

پس:
$$V=\left[\frac{\rho^{۳}}{۳}\right]_{۰}^{a}\left[-\cos\varphi\right]_{۰}^{\alpha}\left[\theta\right]_{۰}^{۲\pi}=\frac{a^{۳}}{۳}(۱-\cos\alpha)\times ۲\pi$$

و بنابراین:
$$V=\frac{۲\pi a^{۳}}{۳}(۱-\cos\alpha)$$

حال، برای تعیین حجم قطعهٔ $V_{۱}$، کافی است که حجم مخروط به معادلهٔ $\varphi=\alpha$ را از V کم کنیم. حجم این مخروط مساوی است با:

$$\frac{\pi r h^{۲}}{۳}=\frac{\pi a^{۳}\sin^{۲}\alpha\cos\alpha}{۳}$$

$$V_{۱}=\frac{۲\pi a^{۳}}{۳}(۱-\cos\alpha)-\frac{\pi a^{۳}}{۳}\sin^{۲}\alpha\cos\alpha$$

$$V_{۱}=\frac{\pi}{۳}a^{۳}(۲-۲\cos\alpha-\sin^{۲}\alpha\cos\alpha)$$

$$V_{۲}=\frac{۴}{۳}\pi a^{۳}-\frac{\pi}{۳}a^{۳}(۲-۲\cos\alpha-\sin^{۲}\alpha\cos\alpha)$$

پس:
$$V_{۲}=\frac{\pi}{۳}a^{۳}(۲+۲\cos\alpha+\sin^{۲}\alpha\cos\alpha)$$

طبق مسألهٔ ارشمیدس باید داشته باشیم:
$$\frac{V_{۱}}{V_{۲}}=k$$

پس:
$$\frac{(۲-۲\cos\alpha-\sin^{۲}\alpha\cos\alpha)}{(۲+۲\cos\alpha+\sin^{۲}\alpha\cos\alpha)}=k$$

پس از ساده کردن، این رابطه به معادله زیر تبدیل می‌شود:

$$(۱+k)\cos\alpha\sin^{۲}\alpha+۲(۱+k)\cos\alpha+۲(k-۱)=۰$$

در این معادله هرگاه $x=\cos\alpha$ انتخاب شود، معادلهٔ فوق به صورت زیر درمی‌آید:

$$x^{۳}-۳x+\frac{۲(۱-k)}{۱+k}=۰ \qquad (۱)$$

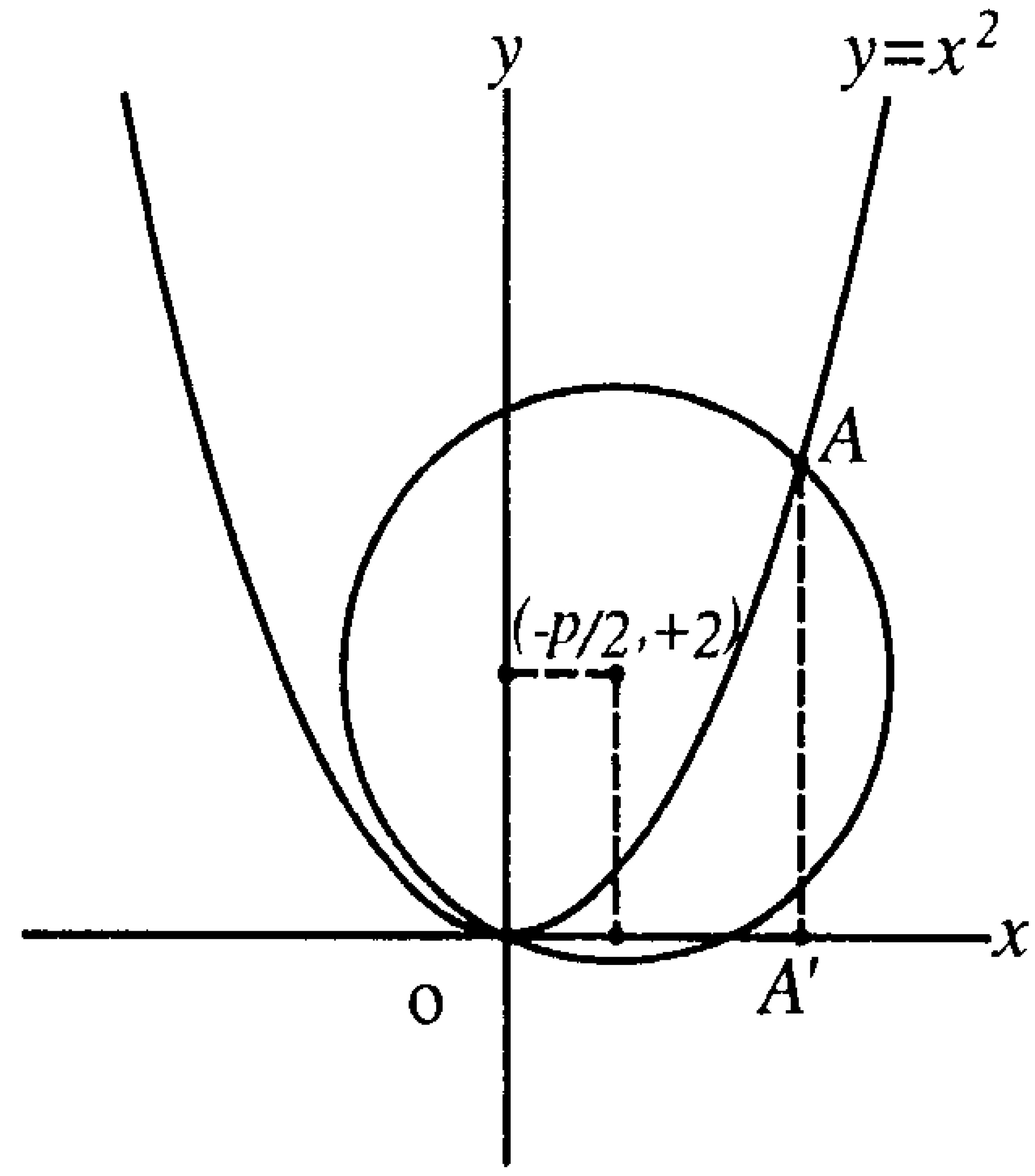
اگر $p=\dfrac{۲(۱-k)}{۱+k}$ آنگاه خواهیم داشت: (۲)
$$x^{۳}-۳x+p=۰$$

با ضرب x در طرفین این معادله داریم: (۳)
$$x^{۴}-۳x^{۲}+px=۰$$

در این معادله با فرض کنیم $y=x^{۲}$ دستگاه زیر را خواهیم داشت:

$$\begin{cases} y^۲ - ۳y + px = ۰ \\ x^۲ - y = ۰ \end{cases}$$

یا:



شکل۶

$$\begin{cases} y = x^۲ \\ x^۲ + y^۲ - ۴y + px = ۰ \end{cases}$$

برای حل هندسی این دستگاه کافی است دایرهٔ $x^۲ + y^۲ - ۴y + px = ۰$ به مرکز $(-\frac{p}{۲}, +۲)$را با سهمی $y = x^۲$ تقاطع دهیم. این دو مقاطع مخروطی در نقطهٔ A یکدیگر را قطع می‌کنند. همانطور که در شکل مشاهده می‌شود $OA = x$، جواب مسألهٔ ما خواهد بود. این معادله همچنین دارای دو ریشهٔ مختلط می‌باشد. البته ریشهٔ $x = ۰$ پارازیت است زیرا معادلهٔ اولیهٔ ما درجهٔ سوم است. پس از تعیین این ریشه‌ها مقدار ریشه‌های معادله اصلی را با استفاده از رابطهٔ $z = x - \frac{a}{۴}$ پیدا می‌کنیم.

نتیجه

همانطور که دیدیم مسأله معروف ارشمیدس، ریاضی‌دانان دورهٔ اسلامی را به حل معادلات درجهٔ سوم سوق داد. با این حال هیچ یک از این ریاضی‌دانان نتوانستند یک نظریهٔ علمی از این معادلات به دست دهند. این نظریه تنها در قرن ششم هجری بدست عمر خیام ریاضیدان عالی‌قدر ایرانی، (متوفّی ۵۱۷ ق/۱۱۲۳م) عرضه شد.

می‌توان خلاصهٔ نظریهٔ خیام را در عرضهٔ صورت کلی همهٔ معادلات درجهٔ سوم، متجانس کردن آنها، حل هر یک از آنها با مقاطع مخروطی و بحث در عده جوابهای آنها دانست.

کتاب‌شناسی

رسالهٔ جبر و مقابله خیام را ویکه نخستین بار در سال ۱۸۵۱م همراه با ترجمهٔ فرانسوی و شرحی عالمانه از آن در پاریس منتشر کرد:

Woepke, F., *L'Algébra d'Omar Khayyam*, Paris, 1851.

رشدی راشد و احمد جبار برای دومین بار این رساله را به فرانسه ترجمه کردند که در سال ۱۹۸۱م در دمشق به چاپ رسیده است:

Rashed, R., et Djebbar, A., *L'œuvre Algebrique d'al-khayyam*, university of Aleppo, 1981.

چاپ سوم این رساله همراه با ترجمهٔ فرانسوی آن در کتاب زیر آمده است:

Rashed, R., et Vahabzadeh, B., *Al-Khayyam Mathematicien*, Paris, 1999.

کازیر با استفاده از متن عربی چاپ ویکه رسالهٔ خیام را به زبان انگلیسی ترجمه کرده است:

Kasir, D.S., *The Algebra of Omar Khayyam*, New York, 1931.

ترجمهٔ انگلیسی دیگری را وینتر و عرفات با استفاده از نسخهٔ خطی موجود در کتابخانه ایندیا افیس در سال ۱۹۵۰م در هندوستان به چاپ رسانده‌اند:

Winter, H.J.J., et W.Arafat " The Algebra of Omar Khayyam", *Journal of the Royal Asiatic Society of Bengal*, vol. XVI (1950), n.1, pp. 27-78.

ترجمهٔ فارسی این رساله را شادروان دکتر غلامحسین مصاحب انجام داده و با اضافاتی در سال ۱۳۳۹ش به چاپ رسانده است.

ترجمهٔ روسی این اثر خیام را دو محقق روس یوشکویچ و رزّنفلد انجام داده‌اند که در سال ۱۹۶۱م در مسکو به چاپ رسیده است. علاوه بر این ترجمه‌ها، مقالات متعددی دربارهٔ این رسالهٔ خیام نوشته شده که بعضی از آنها عبارتند از:

Amir Moez, A.R., "Khayyam's Solution of Cubic Equations", *Mathematics Magazine*, No 35(1962), pp. 270-273.

Coolodge, J., *The Mathematics of Great Amateurs,* Oxford, 1950, Chapter II (Omar Khayyam), pp.19-20.

Eves, H., "Omar Khayyam's Solution of Cubic Equations", *The Mathematics Teacher* LVI (April 1958), pp. 285-286.

Lumpkin, B., "A Mathematics Club Project from Omar Khayyam", *The Mathematics Teacher,* December 1978, pp. 740-743.

Risivi, V.A., "Umar Khayyam as a Geometrician, A Survey", *Islamic Studies,* vol. 24 N°2(1985), pp. 193-204.

Ballieu, M., "Les Rapports Entre l'Algèbre et la Géométrie Dans L'œuvre d'Omar Khayyam et Sharaf ad-Din Al-Tusi (Cinq Siècles Avant Descartes et Newton)", *Mathematiques & Pédagogie,* n°91(1993), p. 7-21.

Woepcke, F., "Notice Sur un Manuscrit Arabe d'un Traité d'Algèbre par Aboul Fath Omar Ben Ibrahim Alkhayami, Contenant la Construction Géométrique des Equations Cubiques," *J.Für die Reine und Angew. Math.* 40 (1850), pp. 160-172.

Woepcke, F., "Les Constructions des Équations du Quatrième Degré Par les Géomètres Arabes", *Journal de Mathèmatiques Pures et Appliquées,* 8 (1863).

Yeschekevitch, A.P., *Les Mathématiques Arabes (VIII-XV Siècles),* Traduction Française par K. Jaouich et M. Cazenay, Paris 1976, pp. 94-99.