تاریخ علم، دورهٔ ۱۱، شمارهٔ ۲، پاییز و زمستان ۱۳۹۲، ص۲۹۱-۳۱۰

نسبت‌های تکرارشونده در هندسهٔ برخالی (فراکتالی) گنبدهای اُرچین

محمد مشایخی*
کارشناس ارشد معماری، مدرس دانشگاه علم و فرهنگ تهران
bas.mashayekhi1384@gmail.com
فرهاد تهرانی
دانشگاه شهید بهشتی تهران
f.tehrani@gmail.com
(دریافت: ۱۳۹۳/۱۲/۱۸، پذیرش: ۱۳۹۴/۰۶/۲۹)

چکیده

در طبقه‌بندی گنبدهای سنتی، گنبد به دودسته گنبدهای رُک (مخروطی) و گنبدهای نار (شبه نیم‌کره) تقسیم می‌شود. گنبدهای اُرچین گونه‌ای از گنبدهای رُک هستند که در منطقهٔ میانرودان (بین‌النهرین) و جنوب غربی ایران درگذشته رواج داشته‌اند. گنبدهای اُرچین شکلی مخروطی دارند و از توالی و تکرار پلکان‌هایی تشکیل‌شده‌اند که در هر ردیف به‌صورت حلقه درآمده‌اند و این حلقه‌ها از پایین به بالا به‌تدریج کوچک می‌شوند. بنا بر این هندسه برخالی بهترین راه برای تبیین هندسهٔ آنهاست. زیرا روابط عددی در تناسبات شکل‌های خودمتشابه در طبقات، و تناسبات اجزاء گنبد اعم از ارتفاع طبقات، دهانه و سایر اجزاء هر یك با رابطه‌ای خاص الگویی برخالی ایجاد می‌کند. این پژوهش با بررسی دقیق گنبدهای اُرچین در این حوزه تلاش دریافتن ساختارهای مختلف هندسهٔ گنبدهای اُرچین با استفاده از دنباله‌های عددی و رابطهٔ آنها با هندسهٔ برخالی دارد.

کلیدواژه‌ها: تناسبات هندسی، دنباله‌های نامتناهی، گنبدهای اُرچین، هندسهٔ برخالی.

معرفی کلی گنبدهای اُرچین

بیشتر متخصصان علت اولیهٔ پدید آمدن فرم گنبد را پوشاندن دهانه‌های بزرگ به‌وسیلهٔ مصالح فشاری می‌دانند. مصالح سنتی مخصوصاً در ایران عموماً فقط توانایی باربری به‌صو رت فشاری را دارند. بنا بر این شکل سازه‌های سنتی از الگوهایی تبعیت می‌کند که با این نوع باربری هماهنگی داشته باشد. شکل‌های منحنی با ضریب مشتق دوم منفی (منحنی‌های دارای ماکسیمم) چنین خاصیتی دارند و تقریباً دوران یا امتداد چنین خطوطی در تمام آثار معماری سنتی مختلف وجود دارند. طاق‌ها و گنبدها نیز به همین مبنا ایجادشده‌اند.

تصویر۱. گنبد بقعهٔ دانیال نبی در شوش یکی از معروف‌ترین نمونه‌های گنبد اُرچین

اما در کنار خواص سازه‌ای استفاده از شکل‌های منحنی در ساختمان اثرات زیبایی‌شناسانه نیز دارد. خطوط منحنی ازنظر زیبایی‌شناسانه ظرفیت‌های بالاتری از خطوط مستقیم دارند، و نه‌تنها هویت بخصوصی برای بناها ایجاد می‌کنند بلکه به‌صورت نمادی فرهنگی نیز درمی‌آیند و بخش‌های شاخص بنا شکل جدی‌تری از نمادپردازی به خود گرفته و مثلاً گنبد اصلی مساجد به‌صورت سمبل مسجد مطرح می‌شود.

در طبقه‌بندی گنبدهای سنتی، گنبد به دودسته گنبدهای رُک (مخروطی) و گنبدهای نار (شبه نیم‌کره) تقسیم می‌شود. اگر گنبد را به‌صورت دوران یک خط در یک محور تصور کنیم، گنبدهایی که با مولد یک خط مستقیم ایجاد می‌شوند گنبدهای رک و

گنبدهایی که با خطوط منحنی و غالباً منحنی‌های دارای بیشینه (ماکسیمم‌دار) ایجاد می‌شوند گنبدهای نار گفته می‌شود. با این طبقه‌بندی، در گنبدهای موجود دسته‌ای فرعی در گنبدهای رک پدید می‌آید که برخلاف گنبدهای رُک عادی که سطحی هموار دارند، به‌صورت پله‌پله ساخته‌شده‌اند. به این گنبدها اُرچین می‌گویند.

گنبدهای اُرچین به‌جز کلیت مخروطی با سایر گنبدهای رک وجه تشابه دیگری نیز دارند که روش آجرچینی آنهاست. گنبدهای رک، ازجمله گنبدهای اُرچین، معمولاً به‌وسیلهٔ آجرچینی خاصی موسوم به لاریز[1] ساخته شده که در این نوع آجرچینی، تراز آجر تغییر نمی‌کند و هر رگ آجر تنها به صورت افقی روی رگ پیشین کمی پیش‌آمده شده و به‌تدریج دهانه گنبد بسته می‌شود. سپس این پوشش به وسیلهٔ آجرهای مخصوص شیب‌دار یا کاشی پوشانده می‌شود؛ در گنبدهای اُرچین تعمداً پوشش به‌صورت ملات سفیدرنگ یا کرم با پله‌هایی با گام اولیه ۸۰ تا ۱۵۰ سانتی‌متری ساخته می‌شوند. اما تفاوت‌های زیادی نیز میان گنبدهای رک ساده و اُرچین وجود دارد، نخست اینکه، مهد گنبدهای رک منطقهٔ شمال ایران است و مهم‌ترین اثر بجامانده از آنها گنبد کاووس بن اسکندر در شهر «گنبد» در استان گلستان و نزدیکی شهر باستانی جرجان است، اما گسترهٔ ساخت گنبدهای اُرچین منطقه جنوب غربی فلات ایران و میان‌رودان تا آسیای صغیر است. دوم اینکه ریشهٔ فرمی گنبدهای رک احتمالاً سقف‌های شیب‌دار برای دفع آب باران در منطقهٔ پرباران شمال بوده است، اما دربارهٔ گنبدهای اُرچین نمی‌توان چنین نظری داشت. به‌علاوه گنبدهای اُرچینی که در سرزمین‌های عربی باقی‌مانده‌اند مربوط به پیامبران بنی‌اسرائیل یا بزرگان اسلامی منطقه میان‌رودان هستند ولی گنبدهای رُک برای میل مقبره‌های پادشاهان ایرانی قرون اولیهٔ اسلامی یا بزرگان شیعه ساخته شده‌اند.

تاریخچهٔ پیدایش گنبدهای اُرچین به قرون میانهٔ هجری پیش از حملهٔ مغول بازمی‌گردد. گنبدهای اُرچین بین قرون ۹ تا ۱۲ هجری خورشیدی و در منطقه‌ای به وسعت سرزمین‌های تحت حکومت سلجوقیان از سیستان تا دمشق گسترده شده‌اند (مهدوی نژاد و مشایخی، ۱۳۹۰). پیدایش این گنبدها و معماری منسجم آن به عصری طلایی در سرزمین‌های اسلامی بازمی‌گردد که سرچشمهٔ بسیاری نوآوری‌های

---

۱. گونه‌ای آجرچینی که در آجرچینی دیوار و سقف‌های طاقی کاربرد دارد.

هنری در جهان اسلام بوده است. با وجود این، گنبدهای اُرچین عموماً در مناطق گرم جنوبی باقی مانده‌اند و به مناطق کوهستانی در شمال فلات ایران و آناتولی راه نیافته‌اند. همچنین این گنبدها درگذر از شرق به غرب این منطقه تغییراتی یافته و با شکل‌های دیگر ترکیب شده‌اند.

در بارهٔ دلایل شکل‌گیری گنبدهای اُرچین دیدگاه‌های گوناگونی وجود دارد و اگرچه برخی از این دلایل مبتنی بر مستنداتی هستند اما هیچ کدام به‌طور کامل شکل بدیع و خاص گنبدهای اُرچین را توضیح نمی‌دهد. گرابار گنبدهای اُرچین را نشانه‌ای از آسمان می‌داند و شکل صعودی همراه با چرخش آنها را نمایانگر گنبد چرخشی آسمان می‌داند. یاسر تابا[1] (ص۶۴) پژوهشگر مشهور معماری اسلامی نظر دیگری دارد:

> ... تقسیم‌بندی ماده به قسمت‌های کوچک، مربوط به مکتبی فکری [در آن دوران] بوده است، به بیان دیگر تقسیم یک گنبد به قسمت‌هایی کوچک‌تر(حجره‌هایش) به معنای [تجسم] یک مکتب رایج [در سده ششم تا دهم هجری] از جهان به [شکل] گنبد بوده است.

او بخشی از عقیدهٔ اشاعره را در سده‌های ۱۰ و ۱۱ میلادی با نظریهٔ مقارنه‌گرایی (Occasionalism) حاکم بر اندیشهٔ زمان همسو می‌داند، که بر اساس آن خدا به‌عنوان حاکم مطلق ریاست می‌کند؛ بنا بر این ماده نه جاودان و نه غیرقابل تغییر است و نه قابل تجزیهٔ نامتناهی است، بلکه از ذراتی ساخته شده است که هر یک از آنها قابل تقسیم نیستند. و بر این مبنا الگوی گنبدهای پلکانی و مضرس اُرچین تجسمی از الگوی اندیشهٔ حاکم در آن زمان از جهان دانسته شده است.

بر اساس یک نگاه دیگر گنبدهای اُرچین تداوم شکل‌های پلکانی در معماری زیگوراتی اقوام باستانی منطقهٔ میان‌رودان دانسته شده است که در این صورت این شکل با منارهٔ سامرا نیز خویشاوند می‌گردد. نگرهٔ دیگری نیز وجود دارد که شکل‌گیری گنبدهای اُرچین را دارای منشأ اقلیمی می‌داند. بدین معنا که معماران با افزایش نسبت سطح به حجم تلاش داشته‌اند تا انتقال حرارت و درنتیجه خنک‌تر شدن گنبد را ممکن کنند؛ یا با ایجاد سطح مضرس، سایه‌اندازی را روی گنبد افزایش دهند.

---

1. Tabbaa

درنهایت می‌توان نتیجه گرفت که گنبدهای اُرچین برگرفته از سنت‌های معماری منطقهٔ خوزستان و میان‌رودان هستند و پیوستگی خوبی با آنها برقرار کرده‌اند و به‌نوعی فن‌آوری ساخت سنتی را با استفاده از مصالح بومی میسر کرده‌اند و اگر هم فقط به دلایل فنی و اقلیمی شکل‌گرفته باشند بازهم ساختاری ریشه‌دار در فرهنگ کهن این منطقه دارند (مهدوی نژاد و مشایخی، ۱۳۹۰).

اما در این مقاله به بررسی هندسهٔ گنبدهای اُرچین و ارتباط آن روابط ریاضی برخالی می‌پردازیم. ویژگی تکرارهای خودمتشابه و تکرار اشکال همراه با تغییر در مقیاس آنها در معماری با هندسه برخالی تبیین می‌شود. تئوری برخال که در سال ۱۹۷۰ توسط ریاضیدان لهستانی، مندل‌بروت ابداع شد همواره کاربرد بسیاری در تجزیه، تحلیل و همچنین ترکیب و تلفیق در طراحی معماری و طراحی شهری داشته است. تعاریف زیادی از اصطلاح بَرخال وجود دارد اما ساده‌ترین آن را می‌توان به این صورت بیان کرد: «برخال فرم یا تصویری است شامل اشکالی که در مقیاس‌های مختلف تکرار می‌شوند.»(مندل بروت، ۱۹۷۲، ص۲۳)

از آنجایی که اساس توسعهٔ گنبدهای اُرچین نیز بر تکرار است و با توجه به تعاریف هندسهٔ برخال، می‌توان این گنبدها را نوعی اشکال برخالی دانست. بنا بر این در این نوشتار ضمن شناسایی کلی با ارائه روابط ریاضی بین ویژگی‌های هندسی ازجمله روابط بین حلقه‌های تکرارشونده، به تجزیه و تحلیل هندسه منحصر به فرد گنبدهای اُرچین پرداخته شده است.

ریشهٔ کلمه اُرچین

در بارهٔ ریشهٔ کلمه اُرچین اختلاف‌نظری در منابع وجود دارد. محمد کریم پیرنیا هم درجایی از کتاب آشنایی با معماری اسلامی ایران می‌نویسد: «"اُر" پیشوندی است به معنای بالا رفتن و نظایر آنها در واژه‌های اردک (مرغ بالا جهنده)، اُرچین (پله)، اُرسی (پنجره بالارونده) و بسیاری از واژه‌های دیگر به کار می‌رود.» (پیرنیا،۱۳۸۷، ۵۷۴) با اینکه این نظر در بین معماران مشهور است، اما ریشه‌شناسی کلمات اردک، النگ، اُرچین و ارسی در فرنگ لغات این فرضیه را تأیید نمی‌کند. مثلاً ریشهٔ «اُرسی» منتسب به روس یا چوب اُرس که یک نوع چوب جنگلی است می‌تواند باشد و اگر آن را ترکیب «اُر»+«سی» بدانیم در این صورت «سی» نیز معنادار نخواهد بود.

گمان دیگر این است که ریشهٔ کلمه اُرچین یک کلمه باریشهٔ عبری ست، به معنی«پله» یا به معنی «مضرّس» (لغت‌نامه آنندراج به نقل از دهخدا ذیل واژه اُرچین). معادل این کلمه امروز در انگلیسی به‌صورت «Urchin» به معنی توتیا یا خارپشت دریایی که با کلمه اُرچین هم‌ریشه است و هر دو از یک کلمه عبری باستانی مشتق شده‌اند. است. این کلمه در لاتین به‌صورت «Ericius» آمده که از ریشهٔ قدیمی‌تر عبری گرفته‌شده است. اگرچه به دلیل قدمت زیاد ریشهٔ این لغت معنای دقیق آن کاملاً روشن نیست اما بنا بر مطالعاتی که عنوان شد می‌توان نتیجه گرفت که لغت اُرچین یک واژهٔ باستانی باریشهٔ عبری است و به معنی پله، پلکان یا شیئی مُضَرَّس. بنا بر دلایل ذکرشده، واژهٔ فارسی «اُرچین» با کلمهٔ انگلیسی Urchin دارای ریشهٔ مشترک عبری هستند که ظاهراً به معنای پلکان یا ساختمان مضرس بوده است.

هندسهٔ برخالی در گنبد اُرچین

تئوری برخال (فراکتال) که در سال ۱۹۷۰ توسط ریاضی‌دان لهستانی، مندل بروت ابداع شد همواره کاربرد بسیاری در تجزیه، تحلیل و همچنین ترکیب و تلفیق در طراحی معماری و طراحی شهری داشته است. اصطلاح فراکتال از واژهٔ لاتین Fractus به معنی شکسته شده و نامنظم خرد شده مشتق شده است. فرهنگستان زبان فارسی واژهٔ برخال را برابر فراکتال تصویب کرده و همچنین برای واژهٔ فرکتالی واژه برخالی را تصویب کرده است که از واژهٔ «برخ» به معنی بخش و قسمت و پسوند -ال (مانند چنگال) تشکیل‌شده است و با واژهٔ فراکتال هم‌معنی است (قبادیان، ۱۳۹۱).

بنیان تشکیل یک فرم برخال بر اساس تکرار گذاشته شده است بدین‌صورت که ترکیبات متعددی از تکرار، اشکال متعدد و متنوعی ایجاد می‌کند و ویژگی نامتناهی بودن در این فرآیند تکرار ،اشکال برخال را مانند کهکشان بی‌نهایت می‌سازد. درنتیجه همین طبیعت بی‌پایان است که برخال‌ها را نمی‌توان با هندسهٔ اقلیدسی تعریف کرد. اگرچه برخال‌ها در زمینه‌ها و نقش‌های متفاوتی بروز می‌کند اما هندسهٔ برخال به‌طور خاص در معماری به‌عنوان یک زبان برای‌ترجمهٔ پیچیدگی‌هایی که مدنظر طراح است، استفاده می‌شود. اساس هر طرح برخالی بر مبنای یک عنصر اولیه و یک‌روند تکرار شکل می‌گیرد. روند تکرار قانونی است که عنصر اولیه بر اساس آن تکرار می‌شود.

گنبد اُرچین یکی از بهترین نمونه‌های ساختمان برخالی ست که بسیار پیش از آنکه تئوری برخال ارائه شود ساخته می‌شده است. در این گنبد حلقه‌هایی بافرم چندضلعی به ترتیب از بزرگ به کوچک روی هم چیده و تکرار می‌شوند.به عبارت دیگر عنصر اولیه حلقه‌ای چندضلعی یا شبه چندضلعی است و روند تکرار شامل چرخش به اندازهٔ $\frac{\pi}{2n}$ (که در آن n تعداد اضلاع چندضلعی است) و کوچک شدن به اندازهٔ قدر نسبتی که در بخش ۴ محاسبه خواهد شد و قرارگیری روی چندضلعی قبلی خواهد بود. بدین ترتیب حلقه‌هایی مشابه با حلقهٔ اصلی اما در مقیاس کوچک‌تر روند کم‌شونده‌ای را ایجاد می‌کند. هندسهٔ برخالی این گنبدها با دنباله‌های عددی در ارتباط است.

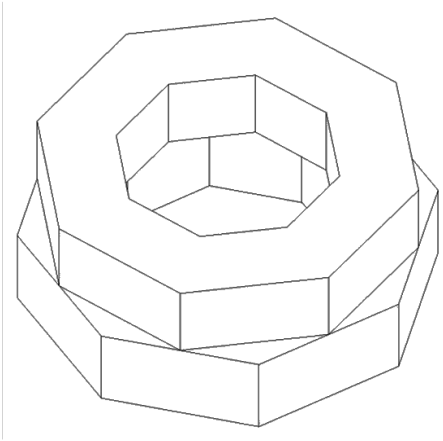
در معماری گذشته ایران هم کمابیش اشکال برخال در جزییات و تزیینات دیده‌شده است. نمونهٔ بارز آنها هم مقرنس است که به‌عنوان یکی از عناصر اصلی معماری اسلامی به کار گرفته می‌شده است. اما به‌کارگیری یک ساختار برخالی برای پاسخگویی به سازه و کلیت بنا در گنبد اُرچین نمونه‌ای منحصر به فرد در معماری گذشتهٔ منطقهٔ ایران است.

معرفی فرم گنبدهای اُرچین

همان طور که گفته شد، گنبدهای اُرچین مخروط‌هایی پله پله هستند که به تدریج کوچک شده و به یک نقطه می‌رسند. اگر هر طبقه را به طور خاص مورد بررسی قرار دهیم درمی‌یابیم که هر طبقه تقریباً به شکل حلقه‌هایی است که قاعدهٔ آن یک چندضلعی منتظم است. در گنبدهای اُرچین این چندضلعی‌ها معمولاً ۱۲، ۱۶ یا ۲۰ ضلعی است. حلقهٔ طبقهٔ بالایی با این حلقه کاملاً مشابه است با این تفاوت که همهٔ نسبت های آن به یک نسبت کوچک شده است.

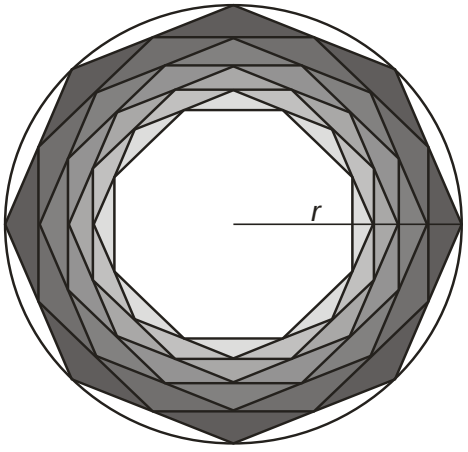
گنبد معمولاً با یک حلقهٔ استوانه‌ای آغاز می‌شود و اولین حلقهٔ چندضلعی روی این استوانه قرار می‌گیرد، سپس حلقه‌های بعدی با کمی چرخش روی حلقهٔ بعدی قرار گرفته و به این صورت گنبد بالا می‌رود. به طوری که به مرحله‌ای می‌رسد که دهانهٔ حلقه بسیار کوچک بوده و معمولاً با طاق گنبدی کوچکی قسمت انتهایی مسدود می‌شود. در برخی از گنبد های اُرچین داخل گنبد هم به صورت مضرّس ساخته شده و در برخی از آنها داخل گنبد یک مخروط کامل می باشد. قانون قرارگیری طبقات بر روی هم این گونه است که رئوس اضلاع هر حلقه روی نقطهٔ وسط رئوس حلقهٔ ردیف

قبل قرار می‌گیرد. یعنی حلقه به نسبتی کوچک شده که دایرهٔ محیطی آن بر دایرهٔ محاطی حلقهٔ قبل منطبق شود (شکل۱).



شکل ۱. دو طبقه از گنبد که روی یکدیگر قرار گرفته‌اند (با فرض $n = ۸$)

اما شکل دقیق حلقه‌های اُرچین چندضلعی نیست، زیرا اگر معمار به همین کم شدن شعاع به وسیلهٔ فاصله میان دایره محیطی و محاطی بسنده کند در چند ضلعی‌هایی با اضلاع زیاد، مثل ۱۶ یا ۲۰ ضلعی، که معمولاً در این گنبدها استفاده می‌شوند فاصلهٔ میان دایرهٔ محیطی و محاطی بسیار کم بوده و کار به هم رساندن گنبد بسیار طولانی و ارتفاع گنبد بسیار زیاد می‌شود.(شکل۲)



شکل ۲. پلان چند طبقه از گنبد (با فرض $n = ۸$)

زیرا اگر گنبد n ضلعی باشد نسبت شعاع دایرهٔ محاطی به شعاع دایرهٔ محیطی برابر است با:

$$\cos\frac{\pi}{n} = \frac{\text{شعاع دایره محاطی}}{\text{شعاع دایره محیطی}}$$

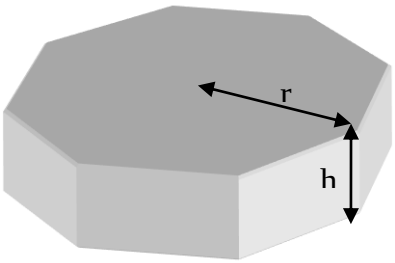
بنا بر این هر چه n بزرگ‌تر باشد نسبت کوچک‌تر شده و تعداد طبقات بیشتر می‌شود. و در طبقه kام نسبت شعاع طبقهٔ kام (r_k) به طبقهٔ اول برابر است با:

$$\text{شعاع دایره محیطی طبقهٔ اول} \times (\cos\frac{\pi}{n})^k = r_k$$

بر این اساس با افزایش مقدار k شعاع دایرهٔ محاطی هر طبقه با نسبتی ثابت که همان مقدار $\cos\frac{\pi}{n}$ است کاهش می‌یابد، اما بنابر همین معادله، هرگز مقدار r_k به صفر نخواهد رسید. و درنهایت زمانی که دهانه گنبد خیلی کوچک شد، گنبد باید به‌وسیله نوع دیگری از پوشش پایان پذیرد.

رابطهٔ هندسه و سازه برخالی گنبد اُرچین آن

مسألهٔ سازه در ساخت گنبدها مانند بسیاری دیگر از سازه‌ها انتقال نیروی وزن و سایر بارهای وارده به گنبد به تکیه‌گاه‌ها است. چنانکه گفته شد مصالح سنتی که گنبدهای اُرچین با آنها اجرا می‌شوند غالباً توانایی بسیار کمی در تحمل نیروهای کششی دارا هستند.پس باید تا حد امکان به وسیلهٔ هندسهٔ مناسب از پدید آمدن نیروهای نامتقارن و کششی در آنها جلوگیری شود. همچنین باید نیروهای وارده را به نحوی مؤثر در سراسر سازه پخش کرد تا افزایش فشار در یک نقطه باعث تخریب موضعی نشود. همان طور که در یک آجر چینی سادهٔ دیوار هر آجر را درست بین دو آجر ردیف زیرین قرار می‌دهند در گنبدهای اُرچین نیز رأس هر طبقه باید درست در وسط دو رأس طبقه پایین قرار داشته باشد تا نیروی وارد آمده به هر قسمت به وسیلهٔ ارتباط دو به دو حلقه‌ها در حین انتقال در طول تکیه‌گاه گسترده شود.



شکل۳. رابطه ارتفاع با شعاع هر طبقه از گنبد

مزیت دیگر این روش قرار دادن حلقه‌ها روی هم اتصال هر راس حلقه با چهار کمان در طبقات مجاور است. بدین معنی که گنبد از پیوستگی بیشتری برخوردار بوده و در هنگام وارد آمدن بارهای دینامیکی یکپارچه‌تر عمل می‌کند، مانند یک مخروط کامل.

ارتباط هندسی حلقه‌ها

از آنجا که مجموع اختلاف شعاع‌های دوایر محاطی و محیطی با شعاع دایرهٔ محیطی حلقهٔ اول برابر است. پس می‌توان رابطه‌ای برای تصاعد آن نوشت:

$$
\begin{aligned}
& r_1\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)+ r_1\left(\cos\frac{\pi}{n}\right)^1\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right) \\
& - r_1\left(\cos\frac{\pi}{n}\right)^2\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right) \\
& + r_1\left(\cos\frac{\pi}{n}\right)^3\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)+\cdots \\
& + r_1\left(\cos\frac{\pi}{n}\right)^n\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right) \\
& \equiv \sum_{i=0}^{n} r_1\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)\left(\cos\frac{\pi}{n}\right)^i = r_1
\end{aligned}
$$

با ساده‌کردن این رابطه نتیجه زیر به دست می‌آید:

$$
\lim_{n\to\infty}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)\sum_{i=0}^{n}\left(\cos\frac{\pi}{n}\right)^i = 1
$$

بنا بر این گنبد در صورتی به پایان می‌رسد که بی‌نهایت حلقه بر روی هم چیده شده باشند. البته معمولاً در زمان اجرا هنگامی که ارتفاع حلقه‌ها خیلی کم می‌شود (حدود ارتفاع یک آجر) گنبد را بوسیله یک طاق ساده پایان می‌دهند.

برخی گنبدهای اُرچین به همین صورت اجرا شده اند مانند گنبد شاهزده ابراهیم هویزه یا امامزاده عبد اللّه دزفول که هر دو به وسیلهٔ چند ضلعی‌هایی که روی هم چیده شده‌اند ساخته شده‌اند.

رابطهٔ ارتفاع با شعاع در حلقه‌ها

از آنجایی که مقدار ارتفاع حلقه‌ها باید با قدر نسبت حلقه‌ها کاهش می یابد تا شیب گنبد ثابت بالا رود. بنابر رابطهٔ گذشته می‌توان نتیجه گرفت ارتفاع گنبد خیلی زیاد خواهد شد.

مثلاً اگر چند ضلعی را ۸ ضلعی در نظر بگیریم ($n = ۸$) در این صورت، قدر نسبت برابر ۰/۹۲ به دست می آید و این یعنی شعاع حلقهٔ دَهم گنبد ۰/۴۵ شعاع حلقهٔ اول است یعنی حدوداً شعاع نصف شده است.

نسبت ارتفاع کل گنبد نیز از رابطهٔ دنباله‌ای از مجموع ارتفاع‌های حلقه‌ها به صورت:

$$h + h\left(\cos\frac{\pi}{n}\right)^{۱} + h\left(\cos\frac{\pi}{n}\right)^{۲} + h\left(\cos\frac{\pi}{n}\right)^{۳} + \cdots + h\left(\cos\frac{\pi}{n}\right)^{n} = H_n$$

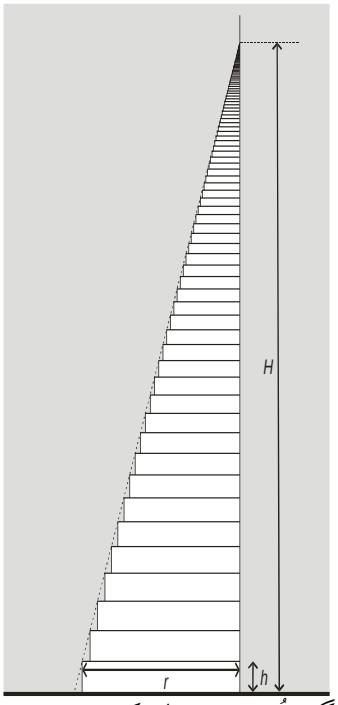
به دست می‌آید. بنا بر این ارتفاع گنبد برابر است با:

$$\frac{h(\left(\cos\frac{\pi}{n}\right)^{n} - ۱)}{(\left(\cos\frac{\pi}{n}\right) - ۱)} = H_n$$

که در آن H ارتفاع کل گنبد و n تعداد طبقات ، h ارتفاع حلقه اولیه است.

در این صورت در حلقه دَهم گنبد ۸ ضلعی چنانکه گفته شد فقط ۰/۵۵ از مقدار شعاع کم شده در حالی که گنبد به ارتفاع h ۶/۹ رسیده است. حال اگر نسبت ارتفاع هر حلقه (h) را به شعاع آن(r) را نیز در نظر بگیریم، مثلاً در یک گنبد به شعاع ۸/۵

متر که ارتفاع حلقهٔ اول یک متر باشد. در حلقهٔ بیست و پنجم، گنبد نزدیک ۷ متر بالا رفته ولی شعاع دهانهٔ دَهم به نزدیک ۳/۸ متر رسیده یعنی فقط ۴/۷ متر از آن کم شده. اگر نمای این گنبد را ترسیم کنیم، شبیه شکل ۶ می‌شود. بنا بر این معماران سنتی راه‌هایی برای بزرگ‌تر شدن قدر نسبت این دنباله ابداع کردند تا ارتفاع گنبد تا حد قابل قبولی کاهش یابد.



شکل ۴. مقطع گنبد اُرچین در حالتی که نسبت ارتفاع به شعاع زیاد است

افزایش اختلاف شعاع در طبقات به‌وسیلهٔ تقعر سطوح جانبی

از آنجایی که به دلایل سازه‌ای نمی‌توان محل رئوس چند ضلعی‌ها را از وسط ضلع چند ضلعی زیرین تغییر داد، همچنین به دلیل عدم تحمل نیروهای کششی توسط مصالح بنایی نمی‌توان بار را در جایی وارد کرد که تکیه‌گاهی ندارد، بنا بر این باید از شکلی استفاده کرد که هم طبقات را به نحوی مؤثر به هم متصل کند و هم اختلاف دایره‌های محیطی و محاطی (قدر نسبت دنباله) بیشتری نسبت به چند ضلعی‌های منتظم داشته باشد.

معماران سنتی در ترسیم چند ضلعی‌ها از دایره‌های محیطی استفاده می‌کردند، وتری از این دایره که ضلع چند ضلعی را تشکیل می‌دهد کمانی از دایره را جدا می‌کند که $\frac{۱}{n}$ دایره را تشکیل می‌دهد، اگر این کمان و کمان‌های مشابهش را نسبت به وترهایشان قرینه کنیم، شکلی شبه ستاره به دست می‌آید که پلان حلقه‌های گنبدهای اُرچین است. در این شکل اختلاف دایره‌های محیطی و محاطی نسبت به چند ضلعی‌های منتظم بیشتر است، ترسیم ساده‌ای دارد و اجرای آن برای معمار ممکن است.

به علاوه می‌توان برای کمان‌ها به جای کمان $\frac{۱}{n}$ از سایر تقسیم‌های دایره استفاده کرد که اگر مثلاً این نسبت جدید را m بنامیم با شرط $m < n$ ، گنبد با ارتفاع کمتری پایان خواهد یافت. زیرا هر چه کمان محدب‌تر باشد اختلاف دایرهٔ محیطی و محاطی بیشتر خواهد شد، پس اگر m کوچک شود کمان محدب‌تر خواهد شد و اختلاف شعاع حلقه‌های گنبد بیشتر خواهد شد و گنبد زودتر پایان می‌یابد. این کمان‌ها را کمان‌های کاهندهٔ شعاع دایرهٔ محاطی می‌نامیم. (شکل۵)

$$r_۱\left(\cos\frac{\pi}{n}\right)+r_۲\left(\cos\frac{\pi}{m}\right)=r_۲+f_۱$$

و از طرفی:

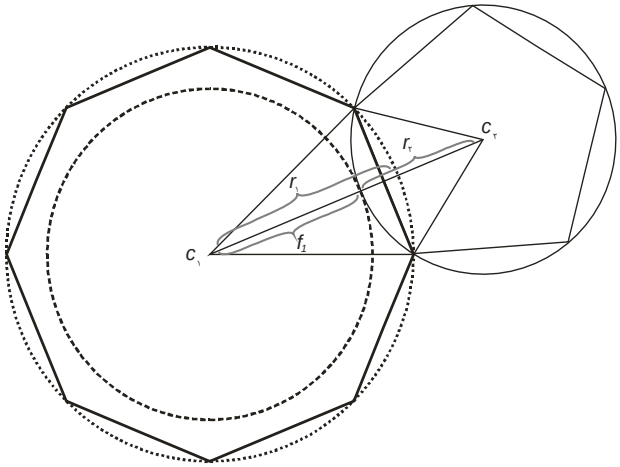
$$r_۱\left(\sin\frac{\pi}{n}\right)=r_۲\left(\sin\frac{\pi}{m}\right)$$

بنا بر این نسبت به صورت:

$$\frac{f_۱}{r_۱}=\left(\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{m}}\right)\left(\left(\cos\frac{\pi}{m}\right)-۱\right)+\left(\cos\frac{\pi}{m}\right)$$

در می‌آید که به صورت زیر ساده می‌شود:

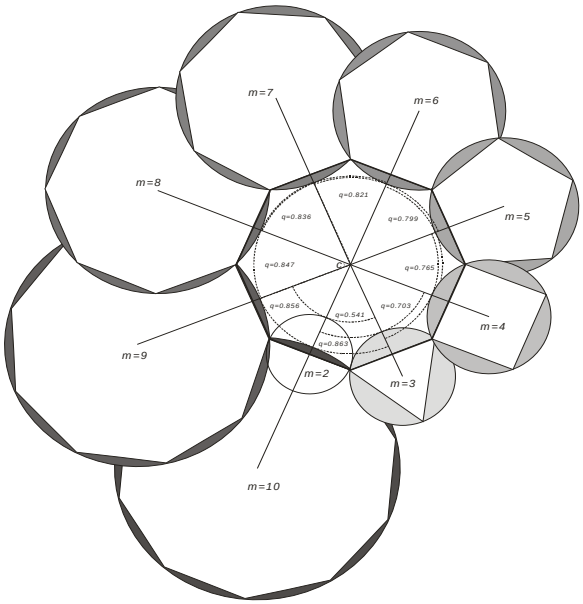
$$\frac{f_۱}{r_۱}=\sin\frac{\pi}{n}\left(\cos\frac{\pi}{۲m}\right)-\cos\frac{\pi}{m}$$



شکل ۵. رابطهٔ میان شعاع دایرهٔ محیطی(r_1) با شعاع دایرهٔ محاطی(f_1) در n ضلعی‌های طبقات گنبد اُرچین در صورتی که کمان‌های کاهندهٔ شعاع دایرهٔ محاطی از یک m ضلعی گرفته شده باشند. (با فرض $n = 8$ و $m = 5$)

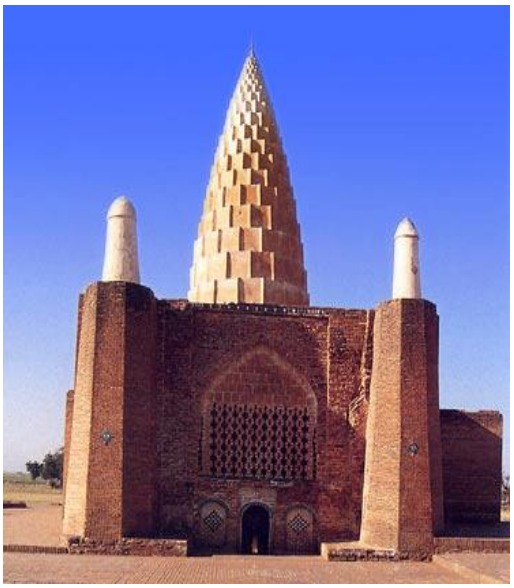
با توجه به رابطهٔ بالا، با افزایش تعداد اضلاع چندضلعی یا اصلی یا افزایش مقدار مقسوم‌علیه کسر کمان‌های کاهندهٔ شعاع دایرهٔ محاطی مقدار اختلاف دایره محیطی و محاطی (قدر نسبت تصاعد - q) کم شده و بنا بر این گنبد خیلی بلند شده و تعداد طبقات آنها بیش از اندازه می‌شود.

بنا بر این برای به دست آوردن بهترین نتیجه باید از کمترین مقدار m (یعنی $m = 2$) و درنتیجه بیشترین مقدار قدر نسبت (q) بهره برد. با توجه به شکل ۶ می‌توان تفاوت قدر نسبت‌های دنباله را در ارتباط با تغییرات نسبت کمان‌های کاهندهٔ شعاع دایرهٔ محاطی (m) مشاهده کرد.



شکل ۶. رابطهٔ تغییر مقدار نسبت کمان‌های کاهنده به شعاع دایرهٔ محاطی و در نتیجه تغییر مقدار قدر نسبت

اما با اینکه کم‌ترین مقدار m بزرگ‌ترین قدر نسبت (q) را پدید می‌آورد، ولی به دو دلیل از آن در ساخت گنبدها استفاده نمی‌شود: نخست اینکه کمان‌های کاهندهٔ برابر $\frac{\pi}{۲}$ رادیان زاویه دارند پس با کمان‌های مجاور خود تداخل خواهند داشت، دوم اینکه قدر نسبت دنباله چنین گنبدی به ازای $n = ۸$ حدوداً برابر ۰/۵۴ است یعنی شعاع هر طبقه حدود نصف شعاع طبقه قبل است، چنین گنبدی بیش از اندازه کوتاه شده و خیز کمی دارد، درنتیجه از نظر ایستایی مقاومت کافی ندارد و فرو خواهد ریخت.



تصویر ۲. گنبد بقعه یعقوب لیث صفاری، نزدیک دزفول، خوزستان

سایر روش‌های افزایش مقدار قدر نسبت

اما برای افزایش قدر نسبت راه‌های دیگری نیز وجود دارد که در برخی گنبدهای اُرچین به‌کار رفته است، به عنوان مثال می‌توان به جای کمان‌های کاهنده شعاع دایرهٔ محاطی کمان‌هایی را به‌صورت محدب به کاربرد که دایرهٔ محیطی را بزرگ کند. از این روش احتمالاً به دلیل اشکالات اجرایی کمتر استفاده شده است، تنها نمونهٔ یافت شده از گنبدهای اُرچین که از این روش برای افزایش اختلاف شعاع طبقات استفاده کرده است، گنبد امامزاده سلیمان بن علی در گناوه است.

روش دیگر استفاده از چندضلعی‌های ستاره ایست. در این حالت بخشی که در گونهٔ پیشین به‌صورت مقعر یا محدب درآمده بود، به سمت داخل شکسته شده تا شکلی ستاره‌ای پدید آورد. این بخش به سمت داخل شکسته می‌شود و دارای زوایایی است که در چندضلعی ستاره‌ای به زوایای بازتاب موسوم است.در این‌گونه از گنبدهای اُرچین زوایای بازتاب روی دایره محاطی و زوایای رأس آنها روی دایره محیطی هر حلقه قرار دارد. ازاین‌گونه از گنبدهای اُرچین نمونه‌های فراوانی در خوزستان و میانرودان باقی مانده است، ازجمله گنبد آرامگاه امامزاده میر محمد (خارک)، آرامگاه امامزاده ابراهیم جایزان (خوزستان) و نمونه‌های دیگری مانند

اینها؛ حدود بیست گنبد از این گونه گنبدهای اُرچین در منطقه جنوب استان خوزستان، استان کهگیلویه و بویراحمد و همچنین استان فارس گسترده شده‌اند.

در این حالت نیز مانند حالت قبل با افزایش اختلاف دایرهٔ محاطی و محیطی در طبقات، ارتفاع کل گنبد کم می‌شود. مقدار این کاهش مانند حالت قبل و طبق روابط مشابه میزان اختلاف شعاع دوایر محاطی و محیطی ارتباط مستقیم دارد. اما مقدار این متغیر که با پارامتر q معرفی شد در این حالت با زاویه بازتاب شکل ستاره رابطه دارد. اگر این زاویه را α بنامیم، این رابطه به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\sin\frac{\pi}{n}\cot\left(\frac{\alpha}{۲}-\frac{\pi}{n}\right)+۱=\frac{R}{r}=q$$

در رابطهٔ فوق R شعاع دایرهٔ محیطی و r شعاع دایرهٔ محاطی است.

در نمونه‌هایی از گنبدهای اُرچین افزایش میزان قدر نسبت به‌وسیلهٔ برآمدگی گوشه‌ها تأمین شده است. نمونه‌های محدودی با این شکل نیز در ایران و منطقهٔ میانرودان وجود دارد، ازجمله آرامگاه امامزاده جعفر (بروجرد) یا آرامگاه یعقوب لیث صفاری(دزفول) که نمی‌توان رابطهٔ قابل قبولی میان اندازهٔ برجستگی گوشه‌های چندضلعی و نسبت ابعاد طبقات یافت، و شاید این شکل از گنبدهای اُرچین را گونه‌ای اولیه از تبدیل طرح گنبدهای ساده با گونه‌های اختری دانست .

گونه دیگر گنبدهای مقرنس است که شکل طبقات ترکیبی از طبقات گنبدهای اُرچین اختری با سه‌کنج‌های داخلی است نمی‌توان رابطهٔ دقیقی میان نسبت‌های طبقات یافت که در گنبد لحاظ شده باشد، علت این امر نیز پیچیدگی شکل نهایی و عدم امکان دقت کافی در هنگام ساخت است. از آنجایی که از این گونه گنبدهای اُرچین نمونه‌های محدودی مانند گنبد امامزاده عبدالله در شوشتر در داخل ایران وجود دارد، و نمونه‌های متکامل گنبدهای اُرچین مقرنس نظیر آنچه در بغداد و دمشق وجود دارد در خوزستان یافت نشده است، می‌توان گنبدهای اُرچین را مقدمه‌ای برساخت گنبدهای مقرنس دانست. زیرا پدید آمدن سه کنج در بخش داخلی گنبدهای اُرچین حاصل ستاره‌ای شکل شدن طبقات در گونه اختری گنبدهای اُرچین است، بنا بر این می‌توان گونه اختری را مرحله‌ای از تکامل گنبدهای اُرچین در رسیدن به شکل‌های پیچیدهٔ مقرنس در گنبدهای اُرچین مقرنس دانست. گنبد امامزاده عبدالله

در شوشتر را می‌توان نمونهٔ خوبی از این روند تکاملی دانست که ازنظر شکلی مرز میان گونهٔ اختری و مقرنس است و نسبتاً خصوصیات هر دو گونه را داراست.

نتیجه‌گیری و جمع‌بندی

چنانکه گفته شد گنبدهای اُرچین ساختار برخالی متنوعی دارند که در مناطق مختلف حسب دلایل هندسی یا سازه‌ای تغییر کرده است. بنا بر این با جمع‌بندی یافته‌های پژوهش می‌توان یک طبقه‌بندی را به منظور گونه‌شناسی گنبدهای اُرچین متصور شد که این گونه‌شناسی در جدول یک تشریح شده است.

جدول ۱. گونه شناسی پیشنهادی برای گنبدهای اُرچین، منبع : نگارنده

انواع گنبدهای اُرچین	شکل حلقه	روش کاهش ارتفاع	مقدار q (n=۱۶)	نمونه
ساده	چندضلعی منتظم	-	۰/۹۸۰۸	بقعهٔ سید صلاح‌الدین محمد (ایلام)، مقبرهٔ ذوالکفل نبی (عراق)، مقام خضر نبی (شوشتر)، امامزاده ابراهیم (هویزه)
کماندار مقعر	چندضلعی باکمان‌های مقعر	کمان‌های کاهندهٔ شعاع دایره حلقه پسین	۰/۸۶۸۱ (m=۳)	بقعهٔ دانیال نبی (شوش)، امامزاده حمزه (ماهشهر)
کماندار محدب	چندضلعی باکمان‌های مقعر	کمان‌های افزاینده شعاع دایره حلقه پیشین	۰/۸۶۸۱ (m=۳)	گنبد امامزاده سلیمان بن علی (گناوه)
اختری	ستاره منتظم الاضلاع	شکستن اضلاع چندضلعی	۰/۸۲ ($\alpha = ۸۳^{\circ}$)	امامزاده میر محمد (خارک) امامزاده ابراهیم جایزان (خوزستان) زیارتگاه کوخرد-بندر لنگه (بوشهر)، امامزاده بابا منیر (ممسنی)
کنج دار	چندضلعی با گوشه‌های برجسته (شکل ۱۴)	برجستگی گوشه‌ها	بسته به میزان برجستگی گوشه‌ها	امامزاده جعفر (بروجرد)، آرامگاه یعقوب لیث صفاری (دزفول)
مقرنس	مانند ستاره‌ای با طاقی‌های برآمده (شکل ۱۵)	شکستن اضلاع چندضلعی	متفاوت	امامزاده عبد اللّه (شوشتر)، بیمارستان نورالدین (دمشق)، بقعه زمرد خاتون (بغداد)، بقعه شیخ عمر سهروردی (بغداد)

منابع

پیرنیا، محمد کریم. (۱۳۷۴ش). آشنایی با معماری اسلامی ایران. تدوین غلامحسین معماریان. تهران: نشر سروش دانش.

ـــــــ . (۱۳۷۸ش). نیارش در سازه‌های طاقی ایران. تدوین غلامحسین معماریان. تهران: سازمان میراث فرهنگی کشور.

ـــــــ . (۱۳۸۲ش). سبک‌شناسی معماری ایرانی. تدوین غلامحسین معماریان. تهران: نشر سروش دانش.

ـــــــ . (۱۳۸۷ش). معماری ایرانی. تدوین غلامحسین معماریان. تهران: نشر سروش دانش.

گرابار، الگ و اتینگهاوزن، ریچارد. (۱۳۷۸ش). هنر و معماری اسلامی. ترجمهٔ یعقوب آژند. تهران: انتشارات سمت.

مهدوی نژاد، محمدجواد و مشایخی، محمد. (۱۳۹۱ش). نقش‌مایهٔ اُرچین و تجلی آن در هنر و معماری ایرانی. مجلهٔ نقش‌مایه، دوره ۵، شماره ۱۰.

Tabbaa, Y. (1985). THE MUQARNAS DOME: Its Origin and Meaning, Muqarnas. *Islamic art and architecture academic journal*. Pp. 61-74.