تاریخ علم، دورهٔ ۱۲، شمارهٔ ۱، بهار و تابستان ۱۳۹۳، ص۱-۱۵

قضیهٔ اول مقالهٔ دهم اصول اقلیدس و چالش‌های پیرامون آن در بین دانشمندان اسلامی

زهرا پورنجف
دانش‌آموختهٔ دورهٔ کارشناسی ارشد تاریخ علم
دانشگاه تهران، پژوهشکدهٔ تاریخ علم
zpournajaf@yahoo.com
(دریافت: ۱۳۹۵/۰۴/۰۸، پذیرش:۱۳۹۵/۰۸/۰۶)

چکیده
قضیهٔ اول مقالهٔ دهم اصول اقلیدس، اساس «روش افنا» است. اقلیدس این قضیه را برای نسبت متغیر ثابت می‌کند. ابن هیثم (سدهٔ ۴ هجری) بنا بر ادعای خود در فی حل شکوک، پی برده بود که حکمی که اقلیدس مطرح می‌کند جزئی است و حکم کلی را برای نسبت ثابت برای اولین بار در این کتاب مطرح و اثبات کرده است. خواجه نصیر الدین طوسی (۵۹۷-۶۷۲ق) در تحریر اصول اقلیدس، همان نظر ابن هیثم را تکرار می‌کند. ابن صلاح همدانی (درگذشته در ۵۴۸ق) رساله‌ای در نقد نظر ابن هیثم با عنوان قول فی إیضاح غلط أبی علی بن الهیثم فی الشکل الأول دارد که در آن سه ایراد به ابن هیثم وارد می‌کند. محمد باقر یزدی (زنده در ۱۰۴۷ق) در رسالهٔ شرح المقالة العاشره در نقد نظر طوسی می‌گوید که با در نظر گرفتن حالت کلی که طوسی آورده است، برهان قضیهٔ دوم مقالهٔ دهم مختل می‌شود و قضیه را در دو حالت نسبت ثابت و متغیر، جداگانه بررسی می‌کند. در این مقاله سیر تاریخی پرداختن به این قضیه بررسی شده است.

کلیدواژه‌ها: اصول اقلیدس، روش افنا، مقالهٔ دهم اصول.

مقدمه

پژوهشگران تاریخ علم نشان داده‌اند که یکی از اصول بسیار مهم ریاضیات باستان، جدا کردن کامل دو مفهوم «عدد» و «مقدار» (موضوعی مادی و هندسی) از یکدیگر بوده است. در فلسفهٔ یونانی، به صورتی که در آثار ارسطو آمده است و تأثیر آن در آثار ریاضی‌دانان یونانی چون اقلیدس، ارشمیدس و آپولونیوس دیده می‌شود، کمیت‌ها به دو دستهٔ کاملاً متمایز تقسیم می‌شوند: ۱- اعداد، که منظور از آن اعداد طبیعی است؛ ۲- مقادیر، که کمیات هندسی (طول و سطح و حجم) و زمانند. در این تقسیم‌بندی، مفهوم کلی «عدد حقیقی» (شامل اعداد گویا و گنگ) وجود ندارد. اعداد گویا (کسرها) را به صورت «نسبت»هایی میان اعداد طبیعی تعریف می‌کردند و موجوداتی که امروزه عدد گُنگ نامیده می‌شوند، با پاره‌خط و نسبت میان آنها با نسبت میان پاره‌خط‌ها نمایش داده می‌شود (معصومی همدانی، ص۴۶۷). به طوری که در کتاب اصول اقلیدس، نظریهٔ اعداد و نظریهٔ مقادیر در دو مقالهٔ جداگانه (به ترتیب در مقاله‌های ۷ و ۹ و مقالهٔ ۵) بررسی می‌شوند.

از این رو موضوع کمیت‌های گنگ برای یونانیان، بیش از آن که بخشی از حساب به شمار آید، بخشی از هندسه در نظر گرفته می‌شد چرا که راهی برای نوشتن و نمایش دادن آنها وجود نداشت و تنها ممکن بود با یک خط راست یا ترکیبی از خط‌های راست نشان داده شوند. این کمیت‌ها، همیشه خط‌های راست گنگ هستند و تمام بحث در این باره جنبهٔ هندسی دارد. تفاوت بین هندسه (علم مربوط به مقادیر پیوسته) و حساب (علم مربوط به کمیت‌های گسسته) باعث یکی از مشکلات اساسی منطقی شد که ریاضی‌دانان باستان، قرن‌ها با آن مواجه بودند. این مشکل اساسی، فقط با یکی کردن مفاهیم «عدد» و «مقدار» در قالب یک ایدهٔ کلی‌تر یعنی اعداد حقیقی و خصوصاً اعداد گنگ، قابل برطرف شدن بود (مَتویوسکایا،[1] ص۲۵۴).

مقالهٔ دهم اصول اقلیدس که کمیت‌های گنگ را مورد بررسی قرار می‌دهد، شامل ۱۱۵ قضیه (۱۰۹ قضیه در تحریر طوسی) و سه بخش تعریف است. در تعریف‌های بخش اول که در اول مقاله آمده است، کمیت‌های اندازه‌پذیر و کمیت‌های اندازه‌ناپذیر، مقادیر گویا و گنگ، تعریف شده‌اند و در تعریف‌های بخش دوم که بعد از قضیهٔ ۴۷ مطرح می‌شوند، به تعریف خطوط گنگ مرکب ذوالاسمین اول تا ششم و

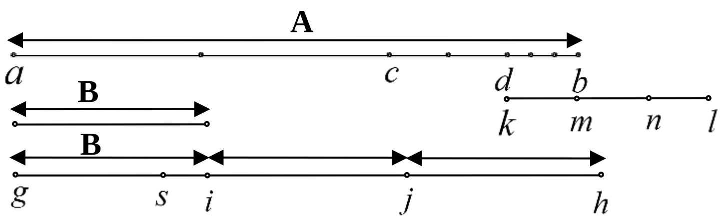
1. Matvievskaya

در تعریف‌های بخش سوم، که بعد از قضیهٔ ۸۴ آمده‌اند، به تعریف خطوط مرکب منفصل اول تا ششم پرداخته می‌شود.

با بررسی شروح دورهٔ اسلامی بر مقالهٔ دهم اصول و نیز تألیفاتی که در خصوص مطالب مقالهٔ دهم اصول در دورهٔ اسلامی تدوین شده‌اند، مشخص می‌شود که دانشمندان اسلامی کوشیده‌اند تا اعداد گنگ را به ریاضیات بیفزایند و چنین مفهومی را تحقق بخشند. هدف ما در این مقاله نه پرداختن به بدنهٔ این مقاله بلکه بحث در بارهٔ نخستین قضیهٔ آن است.

قضیهٔ اول مقالهٔ دهم، اساس «روش افنا»[1] است که بعداً اقلیدس در مقالهٔ دوازدهم از آن استفاده می‌کند. از آن‌جا که این قضیه توسط ارشمیدس (به همین صورت یا صورتی معادل آن) برای محاسبهٔ سطوح و احجام مورد استفاده قرار گرفته، به اصل موضوع ارشمیدس معروف است (بالمر-توماس،[2] «اقلیدس»،[3] ص۴۲۲).

صورت قضیهٔ اول از مقالهٔ دهم اصول اقلیدس چنین است: دو مقدار $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ با شرط $\mathbf{A}>\mathbf{B}$ مفروضند، اگر از $\mathbf{A}$ مقداری بزرگ‌تر از نصف آن را کم کنیم و از باقی‌مانده، مقداری بزرگ‌تر از نصف باقی‌مانده را کم کنیم و این عمل را مرتباً تکرار کنیم، سرانجام مقداری باقی می‌ماند که از $\mathbf{B}$ کوچک‌تر است.



اثبات: دو کمیت نامساوی $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$، با شرط $\mathbf{A}>\mathbf{B}$ داده شده است. $\mathbf{B}$ را چند برابر می‌کنیم تا از $\mathbf{A}$ بزرگ‌تر شود (امکان این عمل را تعریف چهارم از مقالهٔ پنجم اصول تضمین می‌کند). هرچند در اثبات اقلیدس لازم می‌آید تا $\mathbf{B}$ را سه برابر کنیم تا از $\mathbf{A}$ بزرگ‌تر شود، یعنی $\overline{gh}>\overline{ab}$، اما استدلال او کلیت دارد. به طوری که داریم:

---

1. “method of exhaustion”
2. Bulmer-Thomas
3. Euclid

$$\overline{gi} = \overline{ij} = \overline{jh} = \mathbf{B}$$

حال از $\overline{ab}$ مقداری بزرگ‌تر از نصف آن مثل $\overline{ac}$ جدا می‌کنیم ($\overline{ac} > \frac{۱}{۲}\overline{ab}$) و از باقی‌مانده یعنی از $\overline{cb}$ مقداری بزرگ‌تر از نصف آن مثل $\overline{cd}$ جدا می‌کنیم ($\overline{cd} > \frac{۱}{۲}\overline{cb}$) و این عمل را آن‌قدر تکرار می‌کنیم تا تعداد بخش‌های خط $\overline{ab}$ برابر تعداد واحدهای $\mathbf{B}$ در خط $\overline{gh}$ باشد که در این‌جا لازم است این عمل را دو بار تکرار کنیم تا سه بخش $\overline{ac}$ ، $\overline{cd}$ ، $\overline{db}$ (به همان تعداد واحدهای $\mathbf{B}$ در خط $\overline{gh}$ یعنی $\overline{gi}$ ، $\overline{ij}$ ، $\overline{jh}$) بر روی خط $\overline{ab}$ ایجاد شود. می‌خواهیم ثابت کنیم مقدار باقی‌مانده یعنی $\overline{db}$ همواره کوچک‌تر از مقدار کوچک‌تر اولیه یعنی $\mathbf{B}$ است. برای این منظور داریم:

$\overline{db}$ را سه برابر می‌کنیم (همان تعداد برابری که $\mathbf{B}$ را آن تعداد برابر کردیم تا از $\overline{ab}$ بزرگ‌تر شود) تا $\overline{kl}$ حاصل شود. واضح است که $\overline{kl} < \overline{ab}$ ، پس داریم:

$$\begin{cases} \overline{km} = \overline{db} \\ \overline{mn} < \overline{cd} \\ \overline{nl} << \overline{ac} \\ \overline{ab} < \overline{gh} \end{cases} \Rightarrow \overline{kl} << \overline{gh}$$

آنگاه داریم:

$$\overline{km} : \overline{gi} :: \overline{mn} : \overline{ij} :: \overline{nl} : \overline{jh} \Rightarrow \overline{kl} : \overline{gh} :: \overline{km} : \overline{gi}$$
$$\overline{kl} << \overline{gh} \Rightarrow \overline{km} = \overline{db} < \overline{gi} = \mathbf{B}$$

پس مقدار باقی‌ماندهٔ $\overline{db}$ کوچک‌تر از مقدار کوچک‌تر اولیه یعنی $\mathbf{B}$ است. (پایان اثبات).

به زبان امروزی، می‌توان این قضیه را چنین توضیح داد: فرض کنیم $\mathbf{A}$ کمیت بزرگ‌تر باشد. حال اگر از این مقدار، نسبت $\frac{p_۱}{q_۱}\mathbf{A}$ را با فرض $\frac{۱}{۲}<\frac{p_۱}{q_۱}<۱$ کم کنیم و از باقی‌مانده یعنی $\mathbf{A}-\frac{p_۱}{q_۱}\mathbf{A}$ نسبتی بزرگ‌تر از نصف آن مثل $\frac{p_۲}{q_۲}$ کم کنیم و این روند را ادامه دهیم، باید ثابت کنیم که جملهٔ باقی‌ماندهٔ آخر به سمت صفر میل می‌کند یعنی مقداری باقی می‌ماند که از هر مقدار داده‌شده‌ای، کوچک‌تر است:

$$\mathbf{A} > \mathbf{B}$$

$$\mathbf{A}_۱ = \mathbf{A} - \frac{p_۱}{q_۱}\mathbf{A} = \mathbf{A}(۱-\frac{p_۱}{q_۱})$$

$$\mathbf{A}_۲ = \mathbf{A}(۱-\frac{p_۱}{q_۱}) - \frac{p_۲}{q_۲}\mathbf{A}(۱-\frac{p_۱}{q_۱}) = \mathbf{A}(۱-\frac{p_۱}{q_۱})(۱-\frac{p_۲}{q_۲})$$

$$\mathbf{A}_۳ = \mathbf{A}(۱-\frac{p_۱}{q_۱})(۱-\frac{p_۲}{q_۲}) - \frac{p_۳}{q_۳}\mathbf{A}(۱-\frac{p_۱}{q_۱})(۱-\frac{p_۲}{q_۲}) = \mathbf{A}(۱-\frac{p_۱}{q_۱})(۱-\frac{p_۲}{q_۲})(۱-\frac{p_۳}{q_۳})$$

.

.

.

$$\mathbf{A}_n = \mathbf{A}(۱-\frac{p_۱}{q_۱})(۱-\frac{p_۲}{q_۲})(۱-\frac{p_۳}{q_۳})...(۱-\frac{p_n}{q_n}) \ , \ \frac{p_i}{q_i} > \frac{۱}{۲} \quad i = ۱,۲,۳,...,n$$

$$\frac{\mathrm{p}_k}{q_k} \le \frac{p_i}{q_i} \Rightarrow \left(۱-\frac{p_k}{q_k}\right) \ge \left(۱-\frac{p_i}{q_i}\right)$$

$$\mathbf{A}_n = \mathbf{A}(۱-\frac{p_۱}{q_۱})(۱-\frac{p_۲}{q_۲})(۱-\frac{p_۳}{q_۳})...(۱-\frac{p_n}{q_n}) \le \mathbf{A}(۱-\frac{p_k}{q_k})^n$$

$$۰ < \frac{p_k}{q_k} \le \frac{۱}{۲} \quad \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mathbf{A}(۱-\frac{p_k}{q_k})^n \to ۰$$

$$\Rightarrow \mathbf{A}_n \le ۰ \Rightarrow \quad \mathbf{A}_n = ۰$$

اکنون به قضایایی می‌پردازیم که ریاضی‌دانان دوران اسلامی، برای تعمیم این قضیه یا جانشین کردن آن عرضه کرده‌اند.

ابن هیثم

ابن هیثم (شهرت در نیمهٔ نخست سدهٔ ۵ هجری) در کتاب حل شکوک کتاب أقلیدس فی الأصول وشرح معانیه، ادعا می‌کند که قبل از نوشتن حل شکوک به این حقیقت پی برده بود که حکمی که اقلیدس مطرح می‌کند جزئی است، به این معنی که این قضیه نه تنها برای مقادیر $\frac{p}{q} > \frac{۱}{۲}$ بلکه برای هر نسبت ثابت $\frac{p}{q} < ۱$ برقرار است (ابن هیثم، ص ۳۳۲-۳۳۵). به عبارت دیگر ابن هیثم شرط $\frac{p}{q} > \frac{۱}{۲}$ (مقدار $\frac{p}{q}$، یعنی مقداری که در هر مرحله از باقی‌ماندهٔ مرحلهٔ قبل برمی‌داریم لزوماً ثابت نیست) را با شرط ثابت بودن این نسبت جایگزین می‌کند. برای اثبات این ادعای ابن هیثم داریم:

$$\forall p,q \in N \ \& \ \frac{p}{q} < ۱$$

$$\mathbf{A}_۱ = \mathbf{A} - \frac{p}{q}\mathbf{A} = \mathbf{A}(۱ - \frac{p}{q})$$

$$\mathbf{A}_۲ = \mathbf{A}(۱ - \frac{p}{q}) - \frac{p}{q}\mathbf{A}(۱ - \frac{p}{q}) = \mathbf{A}(۱ - \frac{p}{q})(۱ - \frac{p}{q}) = \mathbf{A}(۱ - \frac{p}{q})^۲$$

$$\mathbf{A}_۳ = \mathbf{A}(۱ - \frac{p}{q})^۲ - \frac{p}{q}\mathbf{A}(۱ - \frac{p}{q})^۲ = \mathbf{A}(۱ - \frac{p}{q})^۲(۱ - \frac{p}{q}) = \mathbf{A}(۱ - \frac{p}{q})^۳$$

$$\mathbf{A}_n = \mathbf{A}(۱ - \frac{p}{q})^n$$

$$\frac{p}{q} < ۱ \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mathbf{A}_n \to ۰$$

خواجه نصیرالدین طوسی

خواجه نصیرالدین طوسی (۵۹۷-۶۷۲ق) اصول اقلیدس را در سال ۶۴۶ق تحریر کرد که به تحریر اصول اقلیدس مشهور شد. تحریر خواجه مشتمل است بر خلاصهٔ اثبات‌های قضایای اصول به همراه بیش از دویست یادداشت در توضیح متن که معمولاً با عبارت «اَقُولُ» آغاز می‌شود و به حدود ۱۸۰ قضیهٔ این رساله منضم شده است. این یادداشت‌ها را مسلّماً خود طوسی نوشته است (دیونگ، ۱۳۸۰، ص۶۲۳).

این یادداشت‌ها شامل مباحث یا براهین اضافی است که اقلیدس در کتاب خود نیاورده است؛ بحث در منطق درونی متن اقلیدس، پیشنهادهایی برای ترکیب یک جفت قضیه برای ایجاد یک قضیهٔ واحد، یادداشت‌های فلسفی کلی‌تر، اسامی قضایا (مثلاً قضیهٔ ۴۷ مقالهٔ اول را «قضیهٔ عروس» می‌نامد)، یادداشت‌های ویرایشی در باب تفاوت ترجمه‌های حجاج و اسحاق و گزارش‌هایی دربارهٔ نظر ثابت بن قره در مورد رابطهٔ متن عربی با نسخهٔ یونانی. پربسامدترین موضوع را در این یادداشت‌ها (بیش از نود مورد) براهین جایگزین برای قضایای اقلیدس، یا ساختارهای جایگزین برای قضایا تشکیل می‌دهد (دیونگ، ۱۳۹۰، ص۳۲۹).

خواجه نصیر الدین طوسی در تحریر اصول اقلیدس نظر خود را دربارهٔ این قضیه این چنین توضیح می‌دهد:

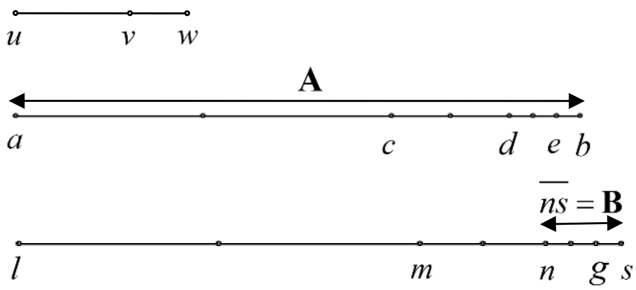
طوسی می‌گوید، اقلیدس در مقالهٔ دوازدهم اصول این حکم را برای مورد خاص $\frac{p}{q}=\frac{۱}{۲}$ نیز به کار برده است،[۱] آنگاه بدون اینکه نامی از ابن هیثم ببرد[۲] نظر او را در مورد این قضیه این چنین تکرار میکند: این قضیه به شرطی که نسبت $\frac{p}{q}$ ثابت باشد، برای حالت $\frac{p}{q}<۱$ همواره برقرار است و حکم قضیه برای دو مورد $\frac{p}{q}>\frac{۱}{۲}$ (البته اقلیدس نسبت را برای حالتی که بزرگ‌تر از $\frac{۱}{۲}$ باشد، ثابت نگرفته است) و $\frac{p}{q}=\frac{۱}{۲}$، جزئی است.

---

۱. به عنوان مثال، در بخشی از برهان قضیهٔ [XII.۱۶] با فرض اولیهٔ $BAD > AD$ می‌خوانیم:

«با نصف کردن کمان BAD و نصف کردن نصف آن و ادامهٔ این عمل، به کمانی کوچک‌تر از AD دست خواهیم یافت.» (نک : هیث، ۱۹۵۶، ج۳، ص۲۴۴)

۲. طوسی در تحریر خود از اصول اقلیدس بدون اینکه نامی از ابن هیثم ببرد، در بسیاری موارد از نظرات ابن هیثم درکتاب فی حل شکوک بهره برده است.



اثبات طوسی: با توجه به شکل، نسبت مفروض را، نسبت $\overline{uv}:\overline{vw}$ می‌گیریم و خط $\overline{ls}$ را که بزرگ‌تر از $\overline{ab}$ است طوری انتخاب می‌کنیم که باتوجه به شکل داشته باشیم:

$$\overline{ns} = \mathbf{B}$$
$$\overline{lm}:\overline{ls}::\overline{mn}:\overline{ms}::\overline{ng}:\overline{ns}::\overline{uv}:\overline{uw}$$

از خط $\overline{ab}$ به نسبت $\overline{uv}:\overline{uw}$ مقادیری جدا می‌کنیم، به طوری که داشته باشیم:

$$\overline{ac}:\overline{ab}::\overline{cd}:\overline{cb}::\overline{de}:\overline{db}$$

آنگاه داریم:

$$\begin{array}{lcl}
\overline{ab}:\overline{ac}::\overline{ls}:\overline{lm} & \Rightarrow & \overline{ab}:\overline{cb}::\overline{ls}:\overline{ms} \\
\Rightarrow \overline{cb}:\overline{cd}::\overline{ms}:\overline{mn} & \Rightarrow & \overline{cb}:\overline{db}::\overline{ms}:\overline{ns} \\
\Rightarrow \overline{db}:\overline{de}::\overline{ns}:\overline{ng} & \Rightarrow & \overline{db}:\overline{eb}::\overline{ns}:\overline{gs} \\
\Rightarrow \overline{ab}:\overline{eb}::\overline{ls}:\overline{gs} & \Rightarrow & \overline{eb}:\overline{ab}::\overline{gs}:\overline{ls}
\end{array}$$

حال با توجه به تعریف ابدال نسبت در تعریف ۱۲ از مقالهٔ پنج اصول داریم:

$$\Rightarrow \overline{eb}:\overline{ab}::\overline{gs}:\overline{ls} \Rightarrow \overline{eb}:\overline{gs}::\overline{ab}:\overline{ls},\ \overline{ab}<\overline{ls}$$
$$\Rightarrow \overline{eb}<\overline{gs}\ ,\ \overline{gs}<\overline{ns}\ ,\ \overline{ns}=\mathbf{B} \Rightarrow \overline{gs}<\mathbf{B} \Rightarrow \overline{eb}<\mathbf{B}$$

ابن صلاح همدانی (درگذشته در ۵۴۸ق)

گرچه از نجم‌الدین (یا کمال‌الدین) ابوالفتوح احمد بن محمد بن سری بن صلاح همدانی به عنوان پزشک نیز یاد شده ولی شهرت عمدهٔ او و نیز معروفیت آثارش بیشتر در ریاضیات است. ابن صلاح با آثار ریاضی‌دانان پیشین به خوبی آشنا بود و چون زبان سریانی می‌دانست، به ترجمهٔ سریانی آثار ریاضی یونانی مراجعه می‌کرد. آثار او را استور و ویراسته و شرح و حواشی انتقادیش را بر کتب دیگران با ارزش و سودمند دانسته‌اند. از جملهٔ این آثار می‌توان به فی کیفیة تسطیح الکری (رساله‌ای دربارهٔ چگونگی تصویر کره بر روی صفحه که امروزه به تصویر کنجنگاری موسوم است)، فی سبب الخطأ والتصحیف العارضین فی جداول المقالتین السابعة والثامنة من کتاب المجسطی وتصحیح ما امکن تصحیحه من ذلک (این رساله دربارهٔ تصحیح اشتباهات جداول مقاله‌های هفتم و هشتم مجسطی است که ابن صلاح در آن خطاهایی را که در تعیین مختصات ستارگان روی داده و خطاهای دیگری که به واسطهٔ استنساخ متعدد کتاب مجسطی حادث شده، اصلاح کرده است. وی همچنین بدان سبب که در تدوین این رساله، مآخذ معتبر و اصلی کار را شناسایی و مقایسه کرده، از ابوالحسن صوفی، بتانی، ابوریحان بیرونی و دیگران با روش کاملاً علمی انتقادهایی به عمل آورده است.) و دو مسألهٔ هندسی و چندین اثر دیگر اشاره کرد (جعفری نائینی، ص ۱۱۷-۱۱۸). او همچنین رساله‌ای در نقد نظر ابن هیثم در مورد قضیهٔ اول مقالهٔ دهم اصول اقلیدس با عنوان قول فی إیضاح غلط أبی علی بن الهیثم فی الشکل الأول من المقالة العاشرة من کتاب أقلیدس فی الأصول دارد که در آن سه ایراد به ابن هیثم وارد می‌کند:

الف: ابن هیثم با ثابت گرفتن نسبت $\frac{p}{q} < ۱$ فقط حالت خاص را در نظر گرفته است.

ب: اقلیدس این قضیه را در قضایای ۲، ۵، ۱۰ و ۱۱ از مقالهٔ ۱۲ به‌کار برده است و کاربرد آن به صورتی که ابن هیثم می‌گوید در این قضایا درست درنمی آید.

ج: در کتب قدما مثل فی مساحة الدایرة ارشمیدس و رسالة فی مساحة القطع المکافی ابراهیم بن سنان بن ثابت نیز قضیه به همان صورتی که اقلیدس بیان می کند، مطرح شده است (راشد،[1] ص۵۰۷-۵۱۰).

در واقع ابن صلاح همدانی قضیه را به همان صورتی که اقلیدس بیان می‌کند، قبول دارد. در مورد ایراد اول باید گفت همدانی نظر درستی دارد چرا که اقلیدس در بیان این قضیه صحبتی از نسبت ثابت نمی‌کند و حکم را برای هر نسبتی که مفصول با مفصول منه داشته باشد بیان می‌کند.

برای درک ایراد دوم، به برخی از قضایایی که ابن صلاح به عنوان دلیلی بر عدم کفایت بیان ابن هیثم از قضیهٔ اول مقالهٔ دوازدهم به آنها اشاره کرده می‌پردازیم. نخست بخشی از اثبات قضیهٔ دوم مقالهٔ ۱۲ اصول را بررسی می‌کنیم:

نسبت دو دایره به یکدیگر مثل نسبت مربع قطرهای آنها به یکدیگر است.

برای اثبات دو دایرهٔ C و $C_۱$ را در نظر می‌گیریم. با در نظر گرفتن قطرهای این دو دایره یعنی D و $D_۱$ می‌خواهیم ثابت کنیم نسبت این دو دایره به یکدیگر مثل نسبت زیر است: $\frac{C}{C_۱}=\frac{D^۲}{D_۱^۲}$

برای اثبات، فرض می‌کنیم نسبت فوق برقرار نباشد پس نسبت مربع قطرهای دو دایره به یکدیگر مثل نسبت دایرهٔ C به مساحتی مانند S است که کوچک‌تر یا بزرگ‌تر از دایرهٔ $C_۱$ است. ابتدا فرض می‌کنیم $\frac{D^۲}{D_۱^۲}>\frac{C}{C_۱}$ پس خواهیم داشت:

$$\frac{D^۲}{D_۱^۲}=\frac{C}{S} \qquad S+\varepsilon=C_۱$$

با در نظر گرفتن چند ضلعی‌های منتظم S_i محاط در دایرهٔ $C_۱$ با ۲^i ضلع داریم:

---

1. Rashed

$$S_{۲} > \frac{۱}{۲} C_{۱} \qquad \Rightarrow \quad A_{۱} = C_{۱} - S_{۲} < \frac{۱}{۲} C_{۱}$$

$$S_{۳} - S_{۲} > \frac{۱}{۲} A_{۱} \quad \Rightarrow \quad A_{۲} = C_{۱} - S_{۳} = A_{۱} - (S_{۳} - S_{۲}) < \frac{۱}{۲} A_{۱} < (\frac{۱}{۲})^{۲} C_{۱}$$

...

$$S_m - S_{m-۱} > \frac{۱}{۲} A_{m-۲}$$

$$A_{m-۱} = C_{۱} - S_m = A_{m-۲} - (S_m - S_{m-۱}) < \frac{۱}{۲} A_{m-۲} < (\frac{۱}{۲})^{m-۱} C_{۱}$$

حال با در نظر گرفتن قضیهٔ اول مقالهٔ دهم اصول می‌توان گفت: $A_n < \varepsilon$ یا $A_n + S_n = C_{۱}$ ؛ پس $S_n > S$ (نیز نک : راشد، ص۵۰۰-۵۰۲).

با بررسی نسبت‌های جدا شده در هر مرحله برای اثبات قضیه می‌بینیم که نسبت فوق نسبت ثابتی نیست:

$$\frac{S_{۲}}{C_{۱}} = \frac{۲}{\Pi}$$

$$\frac{S_{۳} - S_{۲}}{C_{۱} - S_{۲}} = \frac{۲(۱ - \sqrt{۲})}{\Pi - ۲}$$

$$\frac{S_{۴} - S_{۳}}{C_{۱} - S_{۳}} = \frac{۲(۲\sqrt{۲ - \sqrt{۲}} - \sqrt{۲})}{\Pi - ۲\sqrt{۲}}$$

در فی مساحة الدایرة،[1] ارشمیدس در اثبات قضیهٔ اول که می‌گوید: «مساحت هر دایره‌ای برابر با مساحت مثلث قائم‌الزاویه‌ای است که اضلاع زاویهٔ قائمهٔ آن محیط و شعاع دایره باشند» (هیث، ۱۹۱۲، ص۹۱-۹۳). از قضیهٔ اول مقالهٔ دهم اصول بدون در نظر گرفتن نسبتی ثابت بهره برده است.

در قضیهٔ دوم فی مساحة القطع المکافی ابراهیم بن سنان بن ثابت داریم:

«نسبت دو سهمی به یکدیگر مثل نسبت دو مثلث به یکدیگر است که در قاعده و رأس با این دو سهمی مشترک هستند.»

---

1. Measurement of a circle

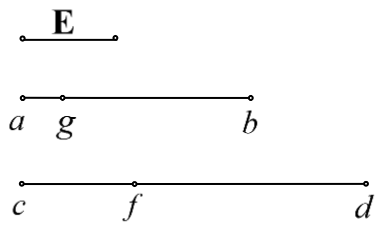
در اثبات این قضیه نیز، ابراهیم بن سنان قضیهٔ اول مقالهٔ دهم اصول را به همان شیوه‌ای که اقلیدس بیان کرده، بکار برده است (ابراهیم بن سنان، ص ۵۹-۶۲).

محمد باقر یزدی

ملا محمد باقر زین العابدین یزدی از ریاضی‌دانان دورهٔ صفویه و معاصر با شاه عباس اول (سلطنت از ۹۹۶ تا ۱۰۳۷ق) و شاه صفی (سلطنت از ۱۰۳۸ تا ۱۰۵۲ق) و شاه عباس دوم (سلطنت از ۱۰۵۲ تا ۱۰۷۷ق) بوده است. اطلاعات دربارهٔ زندگانی این دانشمند ایرانی در منابع بسیار ناچیز است. تنها می‌دانیم که در ۱۰۴۷ق زنده بوده است و کمی پیش از سال ۱۰۶۹ق از دنیا رفته است (قربانی، ص۴۳۶). مهم‌ترین اثر ریاضی او عیون الحساب است که ظاهراً به تقلید از مفتاح الحساب غیاث الدین جمشید کاشانی (درگذشته در ۸۳۲ق) نوشته است.

یزدی در شرحی که بر مقالهٔ دهم اصول اقلیدس با عنوان شرح المقالة العاشرة تألیف کرده است، در نقد نظر طوسی می‌گوید: با حالت کلی که طوسی در نظر می‌گیرد (برقراری حکم قضیه برای نسبت ثابت $\frac{p}{q} < ۱$) برهان قضیهٔ دوم مقالهٔ دهم اصول مختل می‌شود. برای اثبات این ادعا، اثبات قضیهٔ دوم مقالهٔ دهم را می‌آوریم:

دو مقدار نامساوی $\overline{ab}$ و $\overline{cd}$ با فرض $\overline{ab} < \overline{cd}$ داده شده‌اند. اگر $\overline{ab}$ متوالیاً یکی پس از دیگری از $\overline{cd}$ کم شود و مقدار باقی‌مانده هیچ‌وقت کمیت قبل از خود را نشمارد، می‌گوییم دو کمیت $\overline{ab}$ و $\overline{cd}$ اندازه‌ناپذیرند.



یزدی این نظر طوسی را که می‌گوید: «این حکم به هر نسبتی که p با q داشته باشد، با رعایت مدام این نسبت برقرار است»، این طور نقد می‌کند که اگر قضیه به صورتی که طوسی بیان می‌کند بیان شود، برهان قضیهٔ دوم مختل می‌شود. زیرا با بیان مثال عددی ثابت می‌کنیم که در قضیهٔ ۲ لزومی ندارد این نسبت همواره ثابت باشد.

با ذکر یک مثال عددی مطلب را روشن‌تر بیان می‌کنیم:

فرض‌کنیم طبق قضیهٔ ۲، $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ دو مقدار اندازه‌ناپذیر و $\mathbf{A} > \mathbf{B}$ و $\mathbf{B} = \sqrt{۲}$ و $\mathbf{A} = ۱۲$ باشند. طبق قضیهٔ ۲ ابتدا بزرگ‌ترین مضرب صحیح $\mathbf{B}$ را از $\mathbf{A}$ کم می‌کنیم تا باقی‌مانده کوچک‌تر از $\mathbf{A}$ شود؛ برای این منظور داریم:

$$\mathbf{A} - n\mathbf{B} < \mathbf{A} \Rightarrow n = ۸$$

حال داریم:

$$\mathrm{C} = \mathbf{A} - n\mathbf{B} \Rightarrow \mathrm{C} = ۱۲ - ۸\sqrt{۲}$$

با توجه به مقدار تقریبی $\sqrt{۲} \simeq ۱/۴$، می‌توان برای C مقدار تقریبی $۰/۸$ در نظر گرفت. حال به همان روش مرحلهٔ قبل، بزرگ‌ترین مضرب صحیح $\mathbf{C}$ را از $\mathbf{B}$ کم می‌کنیم تا باقی‌مانده کوچک‌تر از $\mathbf{B}$ شود؛ یعنی:

$$\mathbf{B} - n'\mathrm{C} < \mathbf{B}$$

که برای n' مقدار صحیح ۱ را می‌توان در نظر گرفت. حال برای محاسبهٔ نسبت مقدار جدا شده در دو مرحله به کمیتی که این مقدار از آن جدا می‌شود، داریم:

$$(۱)\ \frac{n\mathbf{B}}{\mathbf{A}} = \frac{۸\sqrt{۲}}{۱۲} = \frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$$

$$(۲)\ \frac{n'\mathrm{C}}{\mathbf{B}} = \frac{\left(۱۲ - ۸\sqrt{۲}\right)}{\sqrt{۲}} = \frac{۶\sqrt{۲} - ۸}{۱}$$

همان‌طور که می‌بینید این دو نسبت مساوی نیستند. برای حل این مشکل، یزدی قضیه را به صورت زیر مطرح می‌کند:

برای حالتی که هر بار نصف مقدار را جدا می‌کنیم، نسبت ثابت است، اما برای حالتی که هر بار مقداری کم‌تر از نصف باقی‌مانده را از آن جدا می‌کنیم، برای این که به زبان امروزی حد دنباله به سمت صفر میل کند، نیز لازم است که نسبت ثابت باشد. پس برای این دو حالت نسبت ثابت $\frac{p}{q} \leq \frac{۱}{۲}$ را خواهیم داشت که اثبات آنها بیان شد؛

فقط شرط اثبات قضیه را به جای این که $\frac{p}{q}<۱$ بگیریم، $\frac{p}{q}\leq\frac{۱}{۲}$ خواهیم گرفت. برای حالت بزرگ‌تر از نصف، همان‌طور که دیدیم، لازم نیست این نسبت ثابت باشد و حکم برای نسبت‌های متغیر $\frac{p_i}{q_i}>\frac{۱}{۲}$ به قوت خود باقی است.

نتیجه

چنان که می‌بینیم، قضیهٔ اول از مقالهٔ دوازدهم اصول، در دوران اسلامی موضوع نقد چندین ریاضیدان بوده است. برخی از ایشان مانند ابن هیثم کوشیده‌اند این قضیه را با قضیه‌ای دیگر که به نظر ایشان کلّی‌تر بوده است جانشین کنند. برخی دیگر، هرچند در درستی برهان ابن هیثم خدشه نکرده‌اند، این برهان را به این دلیل که در همهٔ موارد ما را از کاربرد صورت اقلیدسی قضیه بی‌نیاز نمی‌کند رد کرده‌اند و برخی دیگر چون یزدی کوشیده‌اند مواردی را که می‌توان از این قضیه به صورتی که ابن هیثم بیان کرده است استفاده کرد از مواردی که ناگزیر باید از صورت اقلیدسی قضیه استفاده کرد تفکیک کنند.

منابع

ابراهیم بن سنان. (۱۴۰۳ق/۱۹۸۳م). رسائل ابن سنان. به تصحیح احمد سلیم سعیدان، کویت: المجلس الوطنی للثقافة والفنون والآداب.
ابن قفطی. (۱۳۴۷ق). تاریخ الحکماء قفطی: ترجمهٔ فارسی از قرن یازدهم هجری. به کوشش بهمن دارائی، تهران: انتشارات دانشگاه تهران.
ابن ندیم. (۱۳۸۱ش). الفهرست. ترجمهٔ محمد رضا تجدد، تهران: انتشارات اساطیر.
ابن هیثم. (۱۹۸۵م). کتاب فی حل شکوک کتاب أقلیدس فی الأصول وشرح معانیه. چاپ عکسی از فؤاد سزگین، فرانکفورت: معهد تاریخ العلوم العربیة والإسلامیة.
جعفری نائینی، علیرضا. (۱۳۸۳ش). «ابن صلاح همدانی»، دائرةالمعارف بزرگ اسلامی، ج۴، ص ۱۱۷-۱۲۱.
دیونگ، گرگ. (۱۳۹۰ش). «منابع تحریر کتاب اصول اقلیدسِ خواجه نصیر الدین طوسی»، استاد بشر: پژوهش‌هایی در زندگی، روزگار، فلسفه و علم خواجه نصیر الدین طوسی. ترجمهٔ امیر محمد گمینی، گزینش و ویرایش از: حسین معصومی همدانی و محمد جواد انواری، تهران: مرکز پژوهشی میراث مکتوب.
ـــــــ. (۱۳۸۰ش). «تحریر اصول اقلیدس»، دانشنامهٔ جهان اسلام، ج۶، ص ۶۲۲-۶۲۵.
قربانی، ابوالقاسم. (۱۳۷۵ش). زندگی‌نامهٔ ریاضی‌دانان دورهٔ اسلامی، تهران: مرکز نشر دانشگاهی، چاپ دوم.

Bulmer- Thomas, Ivor. (1981). “Euclid”. *Dictionary of Scientific Biography*, vol. 4, pp. 414- 437.
Heath, Thomas. (1956). *The Thirteen books of Euclid's Elements*. Cambridge: at the university press.
——— . (1912). *The works of Archimedes*. New York: Dover.
Matvievskaya, Galina. (1978). “The Theory of Quadratic Irrationals in Medieval Oriental Mathematics”. *From Deferent to Equant*, vol. 500, the New York Academy of Sciences.
Rashed, Roshdi, (1993). “*Les mathèmatiques infinitesimales du IX^{e} au XI^{e} siècle*”. London.