تاریخ علم، دورهٔ ۱۲، شمارهٔ ۲، پاییز و زمستان ۱۳۹۳، ص۱۴۱ـ۱۶۲

تعلیقهٔ محمدکاظم بن رضا طبری بر شرح محمدباقر یزدی بر مقالهٔ دهم اصول اقلیدس[۱]

زهرا پورنجف
دانش‌آموختهٔ دورهٔ کارشناسی ارشد تاریخ علم، پژوهشکدهٔ تاریخ علم، دانشگاه تهران
مرکز تحقیقات نجوم و اخترفیزیک ایران، مراغه، صندوق پستی ۴۴۱-۵۵۱۳۴
zpournajaf@yahoo.com
(دریافت: ۱۳۹۶/۰۳/۰۱، پذیرش: ۱۳۹۶/۰۵/۲۲)

چکیده
حاشیة المقالة العاشرة من أصول الهندسة والحساب عنوان رساله‌ای از محمدکاظم بن رضا طبری (۱۳ق) است که بنا به گفتهٔ مؤلف در ابتدای رساله، در واقع تعلیقه‌ای بر شرح محمدباقر یزدی (زنده در ۱۰۴۷ق) بر مقالهٔ دهم اصول اقلیدس است. محمدباقر یزدی در شرح خود بر مقالهٔ دهم اصول اقلیدس با عنوان شرح المقالة العاشرة من أصول أقلیدس از ۱۰۹ قضیهٔ مقالهٔ دهم، ۶۷ قضیهٔ آن را شرح می‌دهد و ضمن توضیح بسیاری از برهان‌های اقلیدس در اثبات قضایا، مطالب بسیار مفیدی در خلال آنها بیان می‌کند. هرچند طبری دستی بر تمامی ۱۰۹ قضیهٔ مقالهٔ دهم برده و در مورد تمامی این قضایا مطالبی بیان کرده است اما بررسی تعلیقهٔ او نشان می‌دهد که طبری نه تنها در مورد شرح یزدی حرفی برای گفتن ندارد بلکه از درک بحث کلی مقالهٔ دهم اصول عاجز است.

کلید واژه‌ها: محمدباقر یزدی، محمدکاظم بن رضا طبری، مقالهٔ دهم اصول اقلیدس.

۱. این مقاله حاصل پژوهشی است که با حمایت مالی مرکز تحقیقات نجوم و اخترفیزیک مراغه به عنوان یک طرح پژوهشی با شمارهٔ ۱۰۴-۱/۵۲۳۷ انجام شده است. بدین وسیله از آن مرکز تشکر می‌شود.

مقدمه

ملا محمدباقر زین‌العابدین یزدی از ریاضی‌دانان دورهٔ صفویه و معاصر با شاه عباس اول (سلطنت از ۹۹۶ تا ۱۰۳۷ق) و شاه صفی (سلطنت از ۱۰۳۸ تا ۱۰۵۲ق) و شاه عباس دوم (سلطنت از ۱۰۵۲ تا ۱۰۷۷ق) بوده است. اطلاعات در بارهٔ زندگانی این دانشمند دورهٔ اسلامی در منابع بسیار ناچیز است. تنها می‌دانیم که در ۱۰۴۷ق زنده بوده است و کمی پیش از سال ۱۰۶۹ق از دنیا رفته است (قربانی، ص۴۳۶). مهم‌ترین اثر ریاضی او عیون الحساب است که ظاهراً به تقلید از مفتاح الحساب غیاث‌الدین جمشید کاشانی (۸۳۲ق) نوشته است. از کارهای مهم او در این کتاب، کشف دو عدد متحاب ۹,۴۳۷,۰۵۶ و ۹,۳۶۳,۵۸۴ است. معروف است که این دو عدد برای اولین بار در سال ۱۶۳۸م در اروپا به دست آمده‌اند؛ در حالی که یزدی نگارش کتاب عیون الحساب خود را در ۱۰۴۷ق یعنی در ۱۶۳۷م به پایان رسانده و بنا بر این این دو عدد را پیش از این تاریخ به دست آورده بوده است. از دیگر آثار یزدی می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

۱- شرح المقالة العاشرة من أصول أقلیدس (نک : دنبالهٔ مقاله)

۲- حاشیه بر تحریر الکرة والأسطوانة

۳- فتوحات غیبیه (به فارسی): این کتاب در شرح اعمال هندسی تألیف ابوالوفای بوزجانی است.

۴- شرح کتاب أشکال الکریة (متن کتاب الأشکال الکریة از منلاوس است).

۵- حاشیه بر أکر ثاوذوسیوس

۶- مساحة سطح الکرة: نسخهٔ این رساله، به خط خود محمدباقر یزدی، در کتابخانهٔ آستان قدس رضوی موجود است (قربانی، ص ۴۴۰-۴۴۱).

یزدی در شرح المقالة العاشرة من أصول أقلیدس شرحی بر ۶۷ قضیهٔ مقالهٔ دهم اصول فراهم آورده است. شرح یزدی نقدی بر تحریر مقالهٔ دهم اصول اقلیدس نصیر

الدین طوسی (۵۹۷-۶۷۲ق) است و یزدی در آن جملاتی از تحریر طوسی را نقل کرده و به نقد آنها پرداخته است و در خلال قضایا مطالب مفید بسیاری آورده است.[۱]

مقالهٔ دهم اصول اقلیدس که کمیت‌های گنگ ساده و مرکب را مورد بررسی قرار می‌دهد، شامل ۱۱۵ قضیه (۱۰۹ قضیه در تحریر طوسی) و سه بخش تعریف است. در تعریف‌های بخش اول که در اول مقاله آمده‌اند، کمیت‌های اندازه‌پذیر[۲] و کمیت‌های اندازه‌ناپذیر[۳]، مقادیر گویا[۴] و گنگ[۵] تعریف شده‌اندو در تعریف‌های بخش دوم که بعد از قضیهٔ ۴۷ مطرح می‌شوند، به تعریف خطوط گنگ مرکب ذوالاسمین[۶] اول تا ششم پرداخته شده و در تعریف‌های بخش سوم که بعد از قضیهٔ ۸۴ آمده‌اند به تعریف خطوط مرکب منفصل[۷] اول تا ششم پرداخته می‌شود. اولین و تنها خط گنگ سادهٔ مقالهٔ دهم با عنوان خط «موسّط»[۸] در قضیهٔ ۱۷[۹] معرفی می‌شود. اسامی خطوط گنگ مرکب مقالهٔ دهم اصول عبارتند از: «ذوالاسمین»، «ذوالموسّطین اول و دوم»[۱۰]، «اعظم»[۱۱]، «ضلع مجموع یک سطح گویا به اضافهٔ یک سطح موسّط»[۱۲] و «ضلع مجموع دو سطح موسّط»[۱۳]؛ «منفصل»، «منفصل موسّط اول و دوم»[۱۴]، «اصغر»[۱۵]، «خطی که با یک سطح گویا یک کل موسّط می‌سازد» و «خطی که با یک سطح موسّط یک کل موسّط می‌سازد».[۱۶]

---

۱. برای آشنایی با شرح یزدی نک : پورنجف، ۱۳۹۲ش.

2. commensurable
3. incommensurable
4. rational
5. irrational
6. binomial
7. apotome
8. medial

۹. قضیهٔ ۱۷: اگر $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ دو خط گویا و اندازه‌پذیر در قوت باشند، $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ و $\sqrt{\mathbf{A} \times \mathbf{B}}$ گنگ خواهند بود و $\sqrt{\mathbf{A} \times \mathbf{B}}$ را خط موسّط می‌نامیم.

10. first bimedial-second bimedial
11. major
12. side of a rational plus a medial area
13. side of the sum of two medial areas
14. the first apotome of a medial straight line- the second apotome of a medial straight line
15. minor

۱۶. برای آشنایی بیشتر با مفاهیم مقالهٔ دهم اصول اقلیدس نک : پورنجف، ۱۳۹۱ش، سراسر مقاله.

شروح نوشته شده بر مقالهٔ دهم اصول اقلیدس در دورهٔ قاجار

در دورهٔ قاجار دو شرح بر مقالهٔ دهم نوشته شده است: یکی شرح محمدکاظم بن رضا طبری است که در ادامهٔ مقاله به بررسی آن خواهیم پرداخت و دیگری شرحی است ملا محمدحسین نطنزی کاشانی (۱۲۳۵-۱۳۲۲ق) آن را نوشته است. این شرح با عنوان شرح للمقالة العاشرة بالفارسیة که شامل ترجمهٔ فارسی همراه با شرح تحریر خواجه نصیرالدین طوسی است، در سال ۱۳۸۷ش به کوشش محمود اخوان مهدوی و با مقدمهٔ افشین عاطفی به چاپ رسیده است. نطنزی در شرح خود، از شرح دیگری که برادرش، میرزا ابوتراب نطنزی (۱۲۲۱-۱۲۶۲ق)، نوشته است و شرح ابوالحسن اهوازی (نیمهٔ دوم قرن چهارم و احیاناً ربع اول قرن پنجم) استفاده کرده است. وی از برادر خود با عبارت «فاضل المحقّق المولی المدقّق شیخنا و استادنا» و«فخر المهندسین استادالاجل» یاد می‌کند. نطنزی با اشاره به این نکته که خط یا مرکب است از دو خط یا بیشتر، راجع به خطوط گنگ مرکبی که از بیش از دو جمله ترکیب یافته‌اند، سخنی به میان نمی‌آورد و در بارهٔ این خطوط می‌نویسد:

> من گمانم آن است که مرجع آن نیز به خطوطی است که مرکب است از دو خط. مثلاً اگر خطی مرکب باشد از یک خط منطق با یک اصم و یک موسّط، حاصل مرکب خواهد بود از منطق و اصم، چنان‌که بعد از این معلوم شود (اخوان مهدوی، ص ۹۵).

محمدکاظم بن رضا طبری (۱۳ق)

از زندگانی این دانشمند دورهٔ قاجار اطلاعات زیادی در دست نیست اما نگارنده با بررسی فهرست نسخ، تألیفات زیر را در زمینه‌های مختلف علم نحو، تاریخ، فقه، جغرافیا، کلام، نجوم و ریاضیات از او پیدا کرد:

آداب المناظرة (منطق) (درایتی، ج۱، ص۵۷)، الأراضي المفتوحة عنوة (فقه) (همان، ص۶۰۰)، ترجمان طبری= تفسیر ترجمان طبری (لغت) (همو، ج۲، ص۱۱۱۲)، توحید محمدی= التوحید الحقیقی (کلام و اعتقادات) (همو، ج۳، ص۳۹۹)، جامع المقاصد في معرفة الحکم والحاکم والمحکوم علیه (اصول فقه) (همان، ص۶۰۱)، جوامع العلم (ریاضیات) (همان، ص۱۰۵۹)، الجوامع في بیان بعض الاصطلاحات النجومیة والهیویة (هیأت) (همان، ص۱۰۶۰)، حاشیة شرح کتاب في الفقه (فقه) (همو، ج۴، ص۲۷۸)، حل الترکیب (علم نحو) (همو، ج۴، ص۷۵۰)،

خلاصة التواريخ (تاریخ پیامبر اکرم(ص)) (همان، ص۹۳۲)، الدلائل في فن الفقه على المسائل (تفسیر) (همان، ص۱۲۳۹)، رسائل (همو، ج۵، ص۷۲۰)، شرح خلاصة الحساب (همو، ج۶، ص۶۶۶)، طريق الرشاد في شرح الإرشاد (فقه) (همو، ج۷، ص۳۵۷)، فصول الطبري (در باب صور و اشکال ستارگان مرصوده) (همان، ص۱۰۳۰)، كشف المرام في شرح تجريد الكلام (کلام) (همو، ج۸، ص۶۶۵)، كلمات مخزونة (جغرافیا) (همان، ص۷۳۸)، المذاهب (کلام) (همو، ج۹، ص۳۳۳)، مسائل الجسم الطبيعي (فلسفه) (همان، ص۴۷۹)، مکالمه باقری (حدیث) (همان، ص۱۲۳۲)، منتهى الوصول في شرح زبدة الأصول (اصول فقه) (همو، ج۱۰، ص۱۲۹)، نسب النبي (تاریخ پیامبر اکرم(ص)) (همان، ص۶۷۸)، نظارت واقف بر وقف (فقه) (همان، ص۷۲۳) و حاشية المقالة العاشرة من أصول الهندسة والحساب (حسینی اشکوری، ج۵، ص۴۱۵).

حاشية المقالة العاشرة من أصول الهندسة والحساب

تک‌نسخهٔ رسالهٔ حاشية المقالة العاشرة من أصول الهندسة والحساب نوشتهٔ محمدکاظم بن رضا طبری در مرکز احیاء میراث اسلامی قم با شمارهٔ ۱۹۸۴ نگهداری می‌شود. رساله ۷۳ برگ دارد و در انجام آن آمده است که در شوال ۱۲۶۸ به اتمام رسیده است.

در آغاز رساله، طبری ادعا می‌کند که چون شرح یزدی به حد غایت کمک به درک بهتر مطالب غامض مقالهٔ دهم اصول اقلیدس نمی‌کند لذا بر آن شدم تا تعلیقه‌ای بر آن بنویسم؛ باشد که در این امر موفق شوم. در ادامه به بررسی ادعای او و اینکه آیا تعلیقهٔ او مطالب پیچیدهٔ این مقاله را آسان‌تر کرده است یا نه خواهیم پرداخت. طبری در رسالهٔ خود عمدتاً روش یزدی را در شرح تحریر طوسی در پیش گرفته و جملاتی ناقص از شرح یزدی را با شروع عبارت با «قوله» آورده و به توضیح آنها پرداخته است و با «قوله المحرر» جمله‌ای ناقص از تحریر طوسی را می‌آورد و در مورد آن شرح می‌دهد.

بررسی تعلیقهٔ طبری

طبری در ابتدای رساله، کاربرد مبحث مقادیر در طول و سطح و حجم را در خرید و فروش پارچه، خرید و فروش زمین و استفادهٔ محدود از مقیاس مکعبی در معاملات متذکر می‌شود. اما با بررسی رساله به نظر می‌رسد طبری در بسیاری از قضایای مقالهٔ دهم راه خطا رفته است و عمدتاً مثال‌های غلطی می‌آورد(نک : دنبالهٔ مقاله). دلیل اصلی

این امر آن است که به نظر می‌رسد طبری بحث اولیهٔ مقالهٔ دهم، یعنی اندازه‌پذیری و اندازه‌ناپذیری را درک نکرده است. تعریف اقلیدس از این مفاهیم به شرح زیر است:

کمیت‌هایی نسبت به هم «اندازه‌پذیر در طول»[1] هستند که واحد اندازه‌گیری مشترک داشته باشند یا به عبارت دیگر نسبت بین آنها به وسیلهٔ نسبت بین دو عدد صحیح بیان شود. کمیت‌هایی را که نسبت‌شان را نتوان به صورت نسبت دو عدد صحیح بیان کرد کمیت‌های «اندازه‌ناپذیر در طول»[2] گویند. خط‌های راستی را که در طول نسبت به‌هم اندازه‌ناپذیرند، بر حسب اینکه بتوان مربع‌هایی را که بر روی آنها بنا می‌شود با یک واحد مساحت اندازه‌گیری کرد، یا به عبارت دیگر نسبت مربع این خطوط را بتوان به صورت نسبت دو عدد صحیح بیان کرد، خطوط «اندازه‌پذیر در قوت»[3]، در غیر این صورت این خطوط را «اندازه‌ناپذیر در قوت»[4] گویند. برای روشن‌تر شدن این بحث مثالی مطرح می‌کنیم:

الف. دو کمیت اندازه‌پذیر در طول:

$$\begin{cases} \mathbf{A} = \sqrt{۵} \\ \mathbf{B} = \sqrt{۲۰} \end{cases} \Rightarrow \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}} = \frac{\sqrt{۵}}{\sqrt{۲۰}} = \frac{۱}{۲}$$

ب. دو کمیت اندازه‌ناپذیر در طول و اندازه‌پذیر در قوت:

$$\begin{cases} \mathbf{A} = \sqrt{۳} \\ \mathbf{B} = \sqrt{۱۸} \end{cases} \Rightarrow \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}} = \frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۱۸}} = \frac{۱}{\sqrt{۶}} \Rightarrow \frac{\mathbf{A}^{۲}}{\mathbf{B}^{۲}} = \frac{۱}{۶}$$

ج. دو کمیت اندازه‌ناپذیر در قوت (یا به عبارت دیگر اندازه‌ناپذیر در مربع):

1. commensurable in length
2. incommensurable in length
3. commensurable in square
4. incommensurable in square

$$\begin{cases} \mathbf{A} = \sqrt{\sqrt{۱۷}} \Rightarrow \dfrac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}} = \dfrac{\sqrt{\sqrt{۱۷}}}{۲} \Rightarrow \dfrac{\mathbf{A}^۲}{\mathbf{B}^۲} = \dfrac{\sqrt{۱۷}}{۴} \\ \mathbf{B} = ۲ \end{cases}$$

اما طبری این مفاهیم را این‌گونه تعریف می‌کند:

اندازه‌پذیری در طول: مقادیری که مضرب صحیحی از مقیاس انتخاب شده باشند، با آن اندازه‌پذیرند و مضارب کسری از این مقیاس با آن اندازه‌ناپذیرند. در ذیل قضیهٔ ۲۰[1] از دو خط به طول $۲\frac{۱}{۳}$ و $۳\frac{۱}{۲}$ به عنوان دو خط اندازه‌ناپذیر در طول یاد می‌کند.

اندازه‌پذیری در قوت: سطح حاصل از دو خط به طول یک و دو را به عنوان مقیاس انتخاب می‌کنیم. خطوط به طول‌های ۲، ۴ و ۶ با آن در قوت اندازه‌پذیر و خطوط به طول‌های ۳، ۵ و ۷ با آن در قوت اندازه‌ناپذیرند و اینکه اگر سطح حاصل از دو خط به طول یک را به عنوان مقیاس انتخاب کنیم، تمامی خطوط با آن در قوت اندازه‌پذیرند و در ذیل قضیهٔ ۲۰ دو خط به طول $\sqrt{۷}$ و $\sqrt{۹}$ را که مربع آنها را هم نمی‌توان با واحد مشترک شمرد، اندازه‌ناپذیر در قوت می‌نامد.

واضح است که طبری تعریف کاملاً غلطی از این مفاهیم ارائه می‌دهد. یزدی در خلال قضیهٔ ۱۰[2] متذکر می‌شود که مفهوم «تباین[3] در اعداد» با مفهوم «اندازه‌ناپذیری در مقادیر» متفاوت است و مثال زیر را مطرح می‌کند:

---

۱. قضیهٔ ۲۰: اگر $\mathbf{S}_۱$ و $\mathbf{S}_۲$ دو سطح موسّط باشند و $\mathbf{S}_۳$ تفاضل این دو سطح باشد، می‌گوییم $\mathbf{S}_۳$ نمی‌تواند سطحی گویا باشد.

۲. قضیهٔ ۱۰: اگر **A** و **B** هر دو با **C** اندازه‌پذیر باشند، آن‌گاه می‌گوییم **A** و **B** خود با یکدیگر اندازه‌پذیرند.

۳. اعداد متباین (نسبت به هم اول) اعدادی هستند که تنها شمارندهٔ مشترک آنها یک است (اصول [VII, def. 12]).

دو عدد ۵ و ۹ هر دو با ۱۵ متشارک[1] ولی با یکدیگر متباین هستند. ولی بنا به قضیهٔ ۵ (نک : دنبالهٔ مقاله) می‌دانیم دو کمیت را اندازه‌پذیر گویند که نسبت آنها به هم مثل نسبت دو عدد به یکدیگر باشد چه این دو عدد با یکدیگر متباین باشند مثل ۵ و ۹ یا نه.

تعریف یزدی از کمیت‌های «گویا» و «گنگ»، همان تعریف اقلیدس از این کمیت هاست. در مورد کمیت‌های گویا و گنگ، تعریف اقلیدس، با آنچه امروزه از این اعداد تعریف می‌شود، تفاوت دارد. یک خط راست فرضی را بنا به قرارداد گویا در نظر می‌گیریم، اقلیدس نه تنها هر خط راستی را که با این خط راست گویای قراردادی در طول اندازه‌پذیر باشد، بلکه هر خط راستی را که با این خط فقط در قوت اندازه‌پذیر باشد، گویا (گویا در قوت)[2] می‌نامد؛ اما اگر خطی نه در طول و نه در قوت با این خط اندازه‌پذیر باشد، آن را گنگ می‌نامد. از سوی دیگر، بنا به فرض، مربع رسم شده بر روی این خط گویای فرضی را سطح گویا می‌نامیم و هر سطح اندازه‌ناپذیر با این سطح را سطح گنگ می‌نامیم.

واضح است که این کمیت‌های گویا و گنگ کاملاً قراردادی هستند و با عوض شدن کمیت گویای فرضی اولیه، کمیت‌هایی که در قرارداد قبلی گویا به حساب می‌آمدند، در قرارداد جدید ممکن است گنگ شمرده شوند و برعکس. به عنوان مثال می‌دانیم قطر مربع به ضلع یک مساوی با $\sqrt{۲}$ است که نسبت به ضلع این مربع، کمیتی گنگ است. حال اگر این قطر را با قطر مربعی به ضلع دو مقایسه کنیم، نصف آن خواهد بود و لذا نسبت به قطر مربع جدید، گویا خواهد بود.

حجم گویا نیز به حجمی گفته می‌شده است که نسبت آن به توان سوم خط گویای قراردادی، نسبت دو عدد صحیح به یکدیگر باشد.

در واقع اقلیدس، نه تنها $\mathbf{A} = a$ را کمیتی گویا می‌داند، بلکه $\mathbf{B} = \sqrt{a}$ نیز از نظر او گویا (گویا در مربع) است اما کمیتی مثل $\mathbf{C} = \sqrt{\sqrt{a}}$ را که با کمیت گویای قراردادی

---

۱. اعداد متشارک نسبت به هم، اعدادی هستند که مقسوم‌علیه مشترکی بزرگ‌تر از یک داشته باشند. (نصیرالدین طوسی، تحریر کتاب أصول اقلیدس، نسخهٔ خطی شمارهٔ ۴۷۲۷/۱، کتابخانهٔ مدرسهٔ عالی شهید مطهری، صدر مقالهٔ هفتم). اقلیدس از این اعداد، با عنوان «اعداد مرکب» یاد می‌کند (اصول [VII, def. 14]).

2. rational in square

$(\mathbf{A} = a)$ نه در طول و نه در مربع اندازه‌پذیر است، گنگ می‌نامد. اما در مورد سطح گویا، هر سطحی که امروزه به شکل رادیکالی از اندازهٔ آن تعبیر شود، نمی‌توانسته است سطحی گویا باشد، چرا که به زبان امروزی، طول مربع گویای قراردادی، فقط با یک درجه گنگی (با فرجهٔ ۲) گویا در نظر گرفته می‌شده است و لذا سطح گویا، همان مفهوم سطح گویای امروزی را داشته است.

یک تعبیر جبری امروزی از تعریف اقلیدس از خط گویا عبارت است از مجموعهٔ $\sqrt{Q_+^*}$ یعنی اعداد گویای مثبت غیر صفر و نه مجموعهٔ Q به تعبیر امروزی آن. برعکس تعبیر جبری تعریف اقلیدس از سطح گویا ما را به تعریف امروزی اعداد گنگی که اکیداً مثبت هستند، می‌رساند. مثلاً اگر ۲ و $\sqrt{۲}$ را معرف خط بدانیم، گویا خواهند بود و اگر معرف سطح بدانیم، ۲ سطح گویا و $\sqrt{۲}$ سطح گنگ خواهد بود (بن میلاد،[1] ص۹۴).

طبری در رسالهٔ خود در اکثر موارد تعریف درستی از خطوط گویا در طول و گویا در قوت می‌کند اما در برخی موارد هم خطا دارد. به عنوان مثال در شرح قضیهٔ ۲۰ دربارهٔ خطی که نه در طول و نه در قوت گویا باشد مثال غلطی می‌زند و می‌گوید: فرض کنید ۲ خط گویای مفروض باشد. آنگاه خطوط ۳، ۵ و ۷ نه در طول و نه در قوت گویا هستند چرا که حتی مربع ۲ نیز نمی‌تواند مربعات این خطوط را بشمارد.

اینکه طبری این مفاهیم را به درستی درک نکرده در جای جای رساله‌اش مشهود است. در شرح همین قضیهٔ ۲۰ در جایی عنوان می‌کند که «کل مباین اصمٌ ولکن کل اصم لایلزم أن یکون مبایناً بل قدیکون مشترکاً» یعنی هر اندازه‌ناپذیری گنگ است اما هر گنگی لزوماً اندازه‌ناپذیر نیست بلکه ممکن است اندازه‌پذیر باشد که اصولاً یک حرف از اساس غلطی است چرا که اندازه‌پذیری و اندازه‌ناپذیری مفاهیمی قیاسی هستند و این گونه صحبت کردن در مورد آنها بی‌معنی است. در قضیهٔ ۳۲ نیز باز به اشتباه می‌گوید اندازه‌ناپذیر در قوت را نمی‌شود با عدد یا جذر عدد یا جذر جذر عدد تعبیر کرد. در ادامه به بررسی آراء طبری در خلال برخی از قضیه‌های مقالهٔ دهم می‌پردازیم:

---

1. Ben Miled

قضیهٔ۱: دو مقدار $\mathbf{A}$ و$\mathbf{B}$ و با شرط $\mathbf{A} > \mathbf{B}$ مفروضند، اگر از $\mathbf{A}$ مقداری بزرگ‌تر از نصف آن را کم کنیم و از باقی‌مانده، مقداری بزرگ‌تر از نصف باقی‌مانده را کم کنیم و این عمل را مرتباً تکرار کنیم، سرانجام مقداری باقی می‌ماند که از $\mathbf{B}$ کوچک‌تر است.

در این قضیه طبری نقد خوبی بر طوسی وارد می‌کند. او اشاره می‌کند که دو مقدار مفروض در این قضیه باید مقادیری محدود از دو طرف و از یک جنس باشند. البته طبری توضیح بیشتری اضافه نکرده است (نک : پورنجف، ۱۳۹۳ش). در مورد محدود بودن دو مقدار مفروض باید گفت که چنین قیدی درست نیست و این قضیه برای هر دو مقدار $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ با شرط $\mathbf{A} > \mathbf{B}$ برقرار است و چنین قیدی در قضیه نیامده است. اما در مورد هم‌جنس بودن، هر چند بدیهی به نظر می‌رسد، اما طبری قید درستی را افزوده است.

قضیهٔ۵: اگر $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ اندازه‌پذیر باشند، نسبت آن دو به یکدیگر مثل نسبت دو عدد صحیح m و n به یکدیگر است ($\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} = \frac{m}{n}$).

سمت چپ تساوی بالا از جنس مقادیر و سمت راست آن از جنس اعداد هستند، یعنی نسبت دو کمیت از جنس مقادیر مثل نسبت دو کمیت از جنس اعداد شده است. طوسی در این باره می‌گوید آنچه در مقالهٔ هفتم در بارهٔ تساوی دو نسبت آمده است (اصول [VII, def. 20]) برای حالتی درست است که دو طرف تساوی از یک جنس (عدد) باشند. نمی‌توان به این تعریف استناد کرد و تساوی بین نسبت دو مقدار و نسبت دو عدد را توضیح داد.

برای آوردن توضیح مطالب یزدی در این قضیه، نیازمند مقدمه‌ای هستیم. کمیت به‌طور کلی به دو نوع کم متصل (مقدار هندسی مثل طول، سطح و عرض) و کم منفصل (عدد) تقسیم می‌شود که به ترتیب در دو علم هندسه و حساب مورد بحث قرار می‌گیرند. در اساس الاقتباس (ص۴۲)، طوسی می‌نویسد: «عروض انفصال کم متصل را، سبب شمردن آن شود بآحاد مانند ذراعان و غیر آن» یا به زبان ساده‌تر وقتی کم منفصل (عدد) عارض یک کم متصل (مثل طول) می‌شود، آن را می‌شمرد. فرض کنیم توانستیم طولی را اندازه بگیریم و عددی به آن نسبت دهیم. در این حالت می‌گوییم این عدد به این طول عارض شده و این طول معدود شده است؛ چیزی که امروزه بسیار بدیهی است. اما یزدی

در این‌جا از قول سید،[۱] همان نظر فلسفی طوسی را که در بالا آمد، آورده است و می‌گوید وقتی که طولی را اندازه می‌گیریم، به زبان فلاسفه گویند عدد بر آن عارض می‌شود و بزرگی این طول با این عدد بیان می‌شود و در واقع تساوی مذکور، تساوی بین نسبت اعداد عارض شده بر این طول‌ها و نسبت اعداد مطلق m و n است، یعنی تساوی بین دو نسبت هم‌جنس. طبری ذیل این قضیه می‌افزاید که مراد از نسبت دو عدد، نسبت اجزاء به ذی‌الاجزاء است نه این که نسبت دو مقدار مثل نسبت دو عدد باشد، که محرر (طوسی) به اشتباه برداشت کرده است.

قضیهٔ۹: خط مفروض C را در نظر می‌گیریم،[۲] می‌خواهیم دو خط A و B را چنان بیابیم که A فقط در طول و B هم در طول و هم در قوت با خط C اندازه‌ناپذیر باشد.

طبری برای توضیح این قضیه و اینکه دو خط اندازه‌ناپذیر به نسبت دو عدد مربع نیستند، مثال غلطی آورده است. او می‌گوید که فرض کنیم خط مفروض ۲ باشد و نسبت مفروض که مثل نسبت دو عدد مربع نیست، $\frac{۸}{۱۸}$ باشد و نتیجه می‌گیرد که دو خط ۲ و ۳ به نسبت دو عدد مربع نیستند چون نسبت مربع آنها مثل $\frac{۴}{۹}$ است که مثل نسبت ۸ به ۱۸ است که نسبت دو عدد مربع نیست! یزدی در این رابطه و در شرح قضیهٔ ۱۷، طوسی را نقد می‌کند و می‌نویسد که طوسی برای اینکه بگوید نسبت مربع‌های آن دو خط به نسبت دو عدد مربع نباشد این طور نوشته است: «نسبت مربع‌های آن دو به نسبت دو عدد غیر مربع باشد.» یزدی به این جمله اشکال می‌کند و می‌گوید از آنجا که نسبت دو عدد غیر مربع، گاهی مثل نسبت دو عدد مربع است، بهتر بود طوسی جملهٔ خود را این طور می‌نوشت که «نسبت مربع‌های آن دو مثل نسبت دو عدد مربع نباشد.» مثلاً دو عدد ۸ و ۱۸

---

۱. هویت سید برای نگارنده معلوم نشد. در حاشیهٔ قضیهٔ پنجم مقالهٔ دهم نسخهٔ تحریر اصول کتابخانهٔ ملت ترکیه که بخشی از مجموعه‌ای با شمارهٔ ۱۳۵۹ است و در مجموعهٔ نسخ اهدایی شیخ‌الاسلام فیض‌الله افندی این کتابخانه نگهداری می‌شود، عین متن عربی مطلبی که یزدی از قول سید نقل می‌کند، آمده است. این نسخه در ۸۶۹ق کتابت شده است و کاتب و محشی آن معلوم نیست. قسمت تحریر اصول اقلیدس نوشتهٔ نصیرالدین طوسی، از این مجموعه، در سال ۲۰۱۲ در استانبول به کوشش احسان فضلی اوغلو چاپ عکسی شده است (نک : منابع، Nasîruddin Tûsî).

۲. منظور از خط C در این قضیه، فقط خط گویا نیست؛ بلکه می‌تواند هر نوع خط گنگ نیز باشد.

هیچ‌کدام مربع نیستند ولی نسبت آنها به یکدیگر مثل نسبت دو عدد مربع به یکدیگر است.

قضیهٔ ۱۰: اگر A و B هر دو با C اندازه‌پذیر باشند، آن‌گاه می‌گوییم A و B خود با یکدیگر اندازه‌پذیرند.

در این‌جا یزدی، با ذکر تفاوت مفهوم «تباین در اعداد» با مفهوم «اندازه‌ناپذیری در مقادیر» که به آن اشاره شد، یادآور می‌شود که قضیهٔ ۱۰ فقط در مقادیر برقرار است و در اعداد برقرار نیست. هر چند طبری در مورد این بحث مهم یزدی حرفی نمی‌زند ولی باید اشاره کرد که در اکثر موارد، دلیل اینکه مطالب مقالهٔ دهم را درک نمی‌کند این است که مفهوم اشتراک و تباین در اعداد را با مفهوم اندازه‌پذیری و اندازه‌ناپذیری در مقادیر اشتباه گرفته است.

قضیهٔ۱۷: اگر A و B دو خط گویا و اندازه‌پذیر در قوت باشند، $\mathbf{A \times B}$ و $\mathbf{\sqrt{A \times B}}$ گنگ خواهند بود و $\mathbf{\sqrt{A \times B}}$ را خط موسّط می‌نامیم.

اقلیدس نخستین کمیت گنگ را در این قضیه معرفی می‌کند. در تحریرهای دورهٔ اسلامی از اصول اقلیدس، از این کمیت به موسّط (واسط) تعبیر می‌شود. به زبان ریاضی جدید، سطح موسّط به شکل $a\sqrt{b}$ ($\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$) یا $\sqrt{c}$ و کمیت موسّط به شکل $\sqrt{a\cdot\sqrt{b}}$ ($\sqrt{\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}}$) یا $\sqrt[۴]{c}$ است. a ($\sqrt{a}$) و $\sqrt{b}$ اندازه‌پذیر در قوت هستند و داریم: ($c = a^{۲}\cdot b$)

همان طور که گفته شد در مقالهٔ دهم اصول اولین مقدار گنگ در این قضیه و با عنوان موسط معرفی می‌شود و مقادیری مثل $\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۳}$ که امروزه آنها را به عنوان اعداد گنگ می‌شناسیم، در این مقاله با عنوان گویا در قوت شناخته می‌شوند اما طبری بارها در رسالهٔ خود از این مقادیر با عنوان اصم (گنگ) یاد می‌کند. تنها در ذیل قضیهٔ ۲۰ به درستی یادآور می‌شود هر آنچه نتوان از آن به عدد یا جذر عدد تعبیر کرد گنگ است و اینکه خطی که نه در طول و نه در قوت گویا باشد، گنگ است. تمام بحث مقالهٔ دهم اصول این است که مقداری مثل$\sqrt{۳}$ را نمی‌توان با عدد بیان کرد اما طبری به کرات و از جمله در این قضیه، در مثال‌های عددی خود این مقادیر را با تقریب بیان کرده و با

همان تقریب در مثال عددی خود پیش می‌رود و نیز در این قضیه به اشتباه می‌گوید که خطوط موسط شامل کسرها هستند و باید قاعده‌ای برای تسهیل در ضرب آنها در یکدیگر بیان کند.

قضیهٔ۲۳: سطح حاصل از دو خط موسّط اندازه‌پذیر در قوت، یا گویاست یا موسّط.

طبری در اینجا به‌درستی نقدی را به دو حکمی که یزدی در مورد این قضیه بیان کرده است، وارد می‌کند. حکم یزدی به این شرح است: «دو خط موسط اندازه‌ناپذیر در قوت، فقط به سطح گنگ غیر موسط محیط می‌شوند» و «سطح گویا و موسط، محاط به دو خط موسط و اصم نمی‌شوند». طبری می‌گوید که یزدی در مورد سطح گنگ غیر موسط در اولی و خط اصم در دومی هیچ توضیحی نمی‌دهد و حواله به بعد می‌کند ولی در هیچ جای رساله در مورد آنها صحبتی به میان نمی‌آورد.

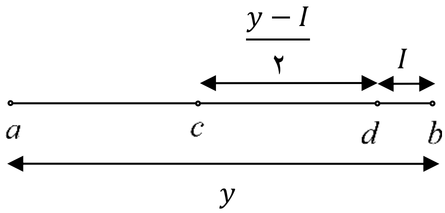
در قضیهٔ ۲۳ یزدی خطوط گنگ جدیدی را که خود معرفی می‌کند، به‌تفصیل شرح می‌دهد و احکام بسیاری در بارهٔ آنها می‌آورد. این خطوط گنگ عبارتند از : تالی موسط و ثالث موسط. تالی موسّط آن است که اگر یک مقدار گویا و یک مقدار موسط داشته باشیم، سطح تشکیل دهندهٔ این دو خط، گنگ غیر موسّط است. این سطح، سطح تالی موسّط و خط قوی بر این سطح (یعنی خطی که مربع ساخته شده روی آن با سطح برابر باشد)، خط تالی موسّط نامیده می‌شود. یزدی ثالث موسط را این طور تعریف می‌کند: فرض کنیم نسبت $\mathbf{B}:\mathbf{A} :: \mathbf{A}:\mathbf{C}$ برقرار باشد. اگر $\mathbf{B}$ و $\mathbf{C}$ تالی موسّط و در قوت با دو مرتبه اندازه‌ناپذیر باشند، $\mathbf{A}$ ثالث موسّط خواهد بود. طبری در بارهٔ این خطوط و احکام مربوط به آنها سخنی نگفته است.

قضیهٔ۲۴: می‌خواهیم دو خط گویای $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ را به گونه‌ای پیدا کنیم که فقط در قوت اندازه‌پذیر باشند و رابطهٔ $\mathbf{A}^۲ - \mathbf{B}^۲ = \mathbf{C}^۲$ به شرطی بین آن دو برقرار باشد که $\mathbf{A}$ با $\mathbf{C}$ اندازه‌پذیر باشد.

طبری بسیار اطالهٔ کلام و تکرار مکررات می‌کند و توضیحاتی می‌دهد که برای هر ریاضی دان بسیار معمولی هم اموری بدیهی هستند. به عنوان مثال در ذیل اثبات این قضیه به توضیح قلب در نسبت، عدد اول و اینکه عددی غیر از یک آن را نمی‌شمارد و رابطهٔ فیثاغورس در مثلث می‌پردازد.

طوسی در تحریر خود در ذیل این قضیه، روش زیر را برای پیدا کردن m و n، دو عددی که تفاضل مربع‌های آنها عدد مربعی نباشد، به شرح زیر ارائه می‌دهد:

فرض کنیم $\overline{ab}$ معادل y باشد که عدد فرد اولی است و از آن $\overline{db}$ را که به اندازهٔ واحد است، جدا کنیم. حال اگر باقی‌مانده را در نقطهٔ c نصف کنیم، اعداد متناظر با $\overline{cb}$ و $\overline{cd}$ دو عدد مطلوب ما هستند چرا که تفاضل مربع‌های آنها همان $\overline{ab}$ است که معادل عدد فرد اولی می‌باشد.



اثبات: اگر فرض کنیم $\overline{ab}$ معادل y باشد که عدد فرد اولی است؛ آن‌گاه داریم:

$$\overline{cd}=\frac{y-\text{I}}{۲}\Rightarrow(\overline{cb})^{۲}-(\overline{cd})^{۲}=\left(\frac{y-\text{I}}{۲}+\text{I}\right)^{۲}-\left(\frac{y-\text{I}}{۲}\right)^{۲}$$

$$=۲\frac{y-\text{I}}{۲}+\text{I}=y-\text{I}+\text{I}=y$$

از آنجا که تفاضل مربع‌های $\overline{cb}$ و $\overline{cd}$ معادل y شد که یک عدد اول است و هیچ‌گاه نمی‌تواند عدد مربعی باشد؛ پس $\overline{cb}$ و $\overline{cd}$ معادل m و n یعنی دو عدد مورد نظر ما هستند. طبری در اینجا همان نظر یزدی، یعنی قید عدد اول را، برای روش طوسی اضافه می‌داند و می‌گوید هر عدد فرد غیرمربع نتیجهٔ مورد نظر را می‌دهد و برای آن مثال عددی می‌آورد:

$$y=۲۱\Rightarrow\left(\frac{y-\text{I}}{۲}+\text{I}\right)^{۲}-\left(\frac{y-\text{I}}{۲}\right)^{۲}=۱۱^{۲}-۱۰^{۲}=۲۱$$

$$y=۲۷\Rightarrow\left(\frac{y-\text{I}}{۲}+\text{I}\right)^{۲}-\left(\frac{y-\text{I}}{۲}\right)^{۲}=۱۴^{۲}-۱۳^{۲}=۲۷$$

می‌توان گفت از این قضیه به بعد که وارد قضیه‌های سخت‌تر و مهم‌تر مقالهٔ دهم می‌شویم، طبری حرفی برای گفتن ندارد و غیر از ارجاع اعمال ریاضی اثبات قضایا به قضیه‌های دیگر و مثال‌های عددی که در بسیاری موارد غلط هستند، مطلب خاصی بیان نمی‌کند.

قضیهٔ۳۲: می‌خواهیم دو خط اندازه‌ناپذیر در قوت C و D را به گونه‌ای پیدا کنیم که $C^{2}+D^{2}$ و S_{CD} موسّط باشند و S_{CD} با $C^{2}+D^{2}$ اندازه‌ناپذیر باشد.

در این قضیه طبری مثال غلطی را برای دو خط موسط اندازه‌پذیر در طول و در قوت ارائه می‌دهد:

> $\sqrt{10}$ و $\sqrt{40}$ دو خط موسط اندازه‌پذیر در طول هستند چرا که مربع‌های آنها به نسبت دو عدد مربع است. $\sqrt{20}$ و $\sqrt{50}$ دو خط موسط اندازه‌پذیر در قوت هستند چرا که مربع‌های آنها به نسبت دو عدد مربع نیست.

واضح است که اینها مثال‌هایی برای دو خط گویا در قوت اندازه‌پذیر در طول و اندازه‌پذیر در قوت هستند. برای دو خط موسط اندازه‌پذیر در طول و در قوت به ترتیب می‌توان مثال‌های زیر را بیان کرد:

$$k\sqrt{\sqrt{\lambda}} \qquad \sqrt{\sqrt{\lambda}}$$

$$\sqrt{k}\sqrt{\sqrt{\lambda}} \qquad \sqrt{\sqrt{\lambda}}$$

قضیهٔ۳۳: اگر A و B دو خط گویای اندازه‌پذیر در قوت باشند، $A + B$ خط راست گنگی است که «ذوالاسمین» نامیده می‌شود.

در این قضیه طبری می‌گوید خط ذوالاسمین را می‌توان از قضیهٔ ۹ استخراج کرد ولی همان‌طور که دیدیم قضیهٔ ۹ هیچ ربطی به خط ذوالاسمین ندارد. از خطوط شش‌گانهٔ گنگ مرکبِ قضیه‌های ۳۳ تا ۳۸، طبری فقط خط ذوالاسمین را درست فهمیده است و مثال‌های درستی برای آن می‌آورد اما برای بقیهٔ خطوط مثال‌های غلط می‌آورد و گویی

اصلاً موضوع را متوجه نشده است، با این وجود در بارهٔ آنها به‌تفصیل سخن می‌گوید و عمدتاً همان اثبات‌های اقلیدس را تکرار می‌کند.

قضیهٔ۴۶: مطلوب پیدا کردن خط راستی است که ذوالاسمین دوم باشد.

روش اقلیدس برای پیدا کردن خط ذوالاسمین دوم از این قرار است. $\mathbf{B} = k\rho$ را خطی اندازه‌پذیر با خط گویای مفروض $\mathbf{A} = \rho$ در نظر می‌گیریم و نیز دو عدد $\rho\left(m^{۲} - n^{۲}\right)$ و $\rho n^{۲}$ را با این شرط که $m^{۲} - n^{۲}$ مربع نباشد، در نظر می‌گیریم. در این قضیه $\mathbf{C}$ را به گونه‌ای فرض می‌کنیم که در تساوی زیر صدق کند:

$$\frac{\rho\left(m^{۲} - n^{۲}\right)}{\rho m^{۲}} = \frac{\mathbf{B}^{۲}}{\mathbf{C}^{۲}} \Rightarrow \frac{\rho\left(m^{۲} - n^{۲}\right)}{\rho m^{۲}} = \frac{k^{۲}\rho^{۲}}{\mathbf{C}^{۲}} \qquad (i)$$

پس داریم:

$$\mathbf{C} = k\rho\frac{m}{\sqrt{m^{۲} - n^{۲}}} = k\rho\frac{\mathrm{I}}{\sqrt{\mathrm{I} - \lambda^{۲}}}$$

در اینجا نیز $\mathbf{C}$ خطی گویا است و فقط در قوت با $k\rho$ اندازه‌پذیر است. پس $k\rho + \mathbf{C}$ یک خط ذوالاسمین است. از (i) می‌دانیم که $\mathbf{C}^{۲} > k^{۲}\rho^{۲}$. فرض می‌کنیم تفاضل این دو، مساوی مقدار دیگری مثل $\mathbf{D}$ باشد. یعنی:

$$\mathbf{C}^{۲} - k^{۲}\rho^{۲} = \mathbf{D}^{۲} \overset{(i)}{\Rightarrow} \frac{\rho m^{۲}}{\rho n^{۲}} = \frac{\mathbf{C}^{۲}}{\mathbf{D}^{۲}}$$

از این رابطه نتیجه می‌شود که $\mathbf{D}$ گویا و با $\mathbf{C}$ اندازه‌پذیر است. پس طبق دومین بخش تعریف مقالهٔ دهم، خط $k\rho + \frac{k\rho}{\sqrt{\mathrm{I}-\lambda^{۲}}}$ یک خط ذوالاسمین دوم است.

در این قضیه، طبری راه‌حل ساده‌تری را برای به دست آوردن ذوالاسمین دوم ارائه می‌دهد: کمیت مربعی مثل $\mathbf{A}^{۲} = ۳۶$ را در نظر می‌گیرد و آن را با ثُلث خودش جمع می‌کند (۴۸=۱۲+۳۶). این مجموع برابر با مربع جزء بزرگ‌تر است، یعنی $\mathbf{B}^{۲} = ۴۸$.

پس خط ذوالاسمین دوم این طور به‌دست می‌آید: $A + B = \sqrt{۴۸} + ۶$ و در ادامه ثابت می‌کند که این خط مرکب با جزء بزرگ‌تر اندازه‌پذیر و با جزء کوچک‌تر در قوت اندازه‌پذیر است:

$$\frac{B^۲}{B^۲ - A^۲} = \frac{۴۸}{۱۲} = \frac{۴}{۱} \qquad \frac{A^۲}{B^۲ - A^۲} = \frac{۳۶}{۱۲} = \frac{۳}{۱}$$

قضیهٔ۶۳: خطی که در طول با خط ذوالاسمینی اندازه‌پذیر باشد، ذوالاسمینی در مرتبهٔ همان ذوالاسمین است.

طبری در شرح این قضیه مثال اشتباهی آورده است. او می‌گوید خط ذوالاسمین اول $\sqrt{۱۰}+۶$ را در نظر می‌گیریم. حال نصف این خط یعنی $\sqrt{۵}+۳$ (!) را در نظر می‌گیریم و می‌بینیم که نصف این خط نیز ذوالاسمین اول است. طوسی در تحریر خود در ذیل قضیهٔ ۶۷[1] می‌گوید این حکم برای خطوطی که در قوت با خطوط گنگ مرکب شش‌گانه اندازه‌پذیر هستند، نیز برقرار است و لازم نیست خط فقط در طول با این خطوط اندازه‌پذیر باشد تا حکم برقرار باشد؛ اما یزدی می‌گوید طبق قول طوسی، خطی که در قوت با خط ذوالاسمین، در هر مرتبه‌ای که باشد (ذوالاسمین اول، دوم،...، ششم)، اندازه‌پذیر باشد، باید خط ذوالاسمین در همان مرتبه باشد، اما چنین نیست که در ادامه نظر خود را شرح می‌دهد. طبری بدون توجه به این توضیحات یزدی همان نظر طوسی را تکرار کرده و همان‌طور که گفته شد با مثالی غلط به توضیح آن می‌پردازد. در ادامه شرح یزدی را با بیان مثال برای چند مورد آن می‌بینیم:

۱. خطی که در قوت با خط ذوالاسمین اول اندازه‌پذیر باشد

الف. یا ذوالاسمین دوم است؛ ب. یا ذوالاسمین سوم است. مثال: خط ذوالاسمین اول $\mathbf{A} = \left(۳ + \sqrt{۸}\right)$ را در نظر می‌گیریم.

---

۱. قضیهٔ ۶۷: خطی که در طول با ضلع مجموع دو سطح موسّط اندازه‌پذیر باشد، خود، ضلع مجموع دو سطح موسّط است.

الف. خطی مثل $\mathbf{B} = \sqrt{۲}\left(۳ + \sqrt{۸}\right)$ را در نظر می‌گیریم که در قوت با $\mathbf{A}$ اندازه‌پذیر است. ثابت می‌کنیم $\mathbf{B}$ ذوالاسمین دوم است.

$$\mathbf{B} = \sqrt{۲}\left(۳ + \sqrt{۸}\right) = ۳\sqrt{۲} + ۴$$

$$۳\sqrt{۲} > ۴ \Rightarrow \left(۳\sqrt{۲}\right)^{۲} - ۴^{۲} = ۱۸ - ۱۶ = ۲$$

می‌دانیم $\sqrt{۲}$ با $۳\sqrt{۲}$ در طول اندازه‌پذیر است؛ پس خط مورد نظر ذوالاسمین دوم است.

ب. حال، خطی دیگر مثل $\mathbf{C} = \sqrt{۵}\left(۳ + \sqrt{۸}\right)$ را در نظر می‌گیریم که در قوت با $\mathbf{A}$ اندازه‌پذیر است. ثابت می‌کنیم $\mathbf{C}$ ذوالاسمین سوم است.

$$\mathbf{C} = \sqrt{۵}\left(۳ + \sqrt{۸}\right) = ۳\sqrt{۵} + \sqrt{۴۰}$$

$$۳\sqrt{۵} > \sqrt{۴۰} \Rightarrow \left(۳\sqrt{۵}\right)^{۲} - \left(\sqrt{۴۰}\right)^{۲} = ۴۵ - ۴۰ = ۵$$

می‌دانیم $\sqrt{۵}$ با $۳\sqrt{۵}$ در طول اندازه‌پذیر است؛ پس خط مورد نظر ذوالاسمین سوم است.

همان‌طور که دیدیم امکان ندارد خطی که در قوت با خط ذوالاسمین اول اندازه‌پذیر است، ذوالاسمین اول باشد.

۲. خطی که در قوت با خط ذوالاسمین دوم اندازه‌پذیر باشد

الف. یا ذوالاسمین اول است؛ ب: یا ذوالاسمین سوم است.

۳. خطی که در قوت با خط ذوالاسمین سوم اندازه‌پذیر است

الف. یا ذوالاسمین اول است؛ ب. یا ذوالاسمین دوم است؛ ج. و یا ذوالاسمین سوم است. مثال: خط ذوالاسمین سوم $\mathbf{A} = \left(\sqrt{۸} + \sqrt{۶}\right)$ را در نظر می‌گیریم.

الف. خط $\mathbf{B} = \sqrt{۲}\left(\sqrt{۸} + \sqrt{۶}\right)$ را که در قوت با $\mathbf{A}$ اندازه‌پذیر است، در نظر می‌گیریم. ثابت می‌کنیم $\mathbf{B}$ ذوالاسمین اول است.

$$\mathbf{B} = \sqrt{۲}\left(\sqrt{۸} + \sqrt{۶}\right) = ۴ + ۲\sqrt{۳}$$

$$۴ > ۲\sqrt{۳} \Rightarrow \left(۴\right)^{۲} - \left(۲\sqrt{۳}\right)^{۲} = ۴$$

و می‌دانیم ۲ با ۴ در طول اندازه‌پذیر است؛ پس $\mathbf{B}$ ذوالاسمین اول است.

ب. برای این مورد مثالی یافت نشد و به نظر غیر ممکن است.

ج. در اینجا، خطی دیگر مثل $\mathbf{C} = \sqrt{۳}\left(\sqrt{۸} + \sqrt{۶}\right)$ را در نظر می‌گیریم که آن هم در قوت با $\mathbf{A}$ اندازه‌پذیر است. ثابت کنیم $\mathbf{C}$ ذوالاسمین سوم است.

$$\mathbf{C} = \sqrt{۳}\left(\sqrt{۸} + \sqrt{۶}\right) = ۲\sqrt{۶} + ۳\sqrt{۲}$$

$$۲\sqrt{۶} > ۳\sqrt{۲} \Rightarrow \left(۲\sqrt{۶}\right)^{۲} - \left(۳\sqrt{۲}\right)^{۲} = ۶$$

و چون $\sqrt{۶}$ با $۲\sqrt{۶}$ در طول اندازه‌پذیر است؛ پس $\mathbf{C}$ ذوالاسمین سوم است.

۴. خطی که در قوت با ذوالاسمین چهارم اندازه‌پذیر است

الف. یا ذوالاسمین پنجم است؛ ب. یا ذوالاسمین ششم است.

۵. خطی که در قوت با ذوالاسمین پنجم اندازه‌پذیر است

الف. یا ذوالاسمین چهارم است؛ ب. یا ذوالاسمین ششم است.

۶. خطی که در قوت با ذوالاسمین ششم اندازه‌پذیر است

الف. یا ذوالاسمین چهارم است؛ ب. یا ذوالاسمین پنجم است؛ ج. و یا ذوالاسمین ششم است. خط ذوالاسمین ششم $\mathbf{A} = \left(۵\sqrt{۲} + ۲\sqrt{۱۵}\right)$ را در نظر می‌گیریم.

الف. خط $\mathbf{B} = \sqrt{۱۵}\left(۵\sqrt{۲} + ۲\sqrt{۱۵}\right)$ را در نظر می‌گیریم و داریم:

$$\mathbf{B} = \sqrt{۱۵}\left(۵\sqrt{۲} + ۲\sqrt{۱۵}\right) = ۵\sqrt{۳۰} + ۳۰$$

$$۳۰ > ۵\sqrt{۳۰} \Rightarrow \left(۳۰\right)^{۲} - \left(۵\sqrt{۳۰}\right)^{۲} = \left(۵\sqrt{۱۰}\right)^{۲}$$

و چون $۵\sqrt{۱۰}$ با ۳۰ در قوت اندازه‌پذیر است؛ خط $\mathbf{B}$ ذوالاسمین چهارم است.

ب. خط $\mathbf{C} = \sqrt{۲}\left(۵\sqrt{۲} + ۲\sqrt{۱۵}\right)$ را که در قوت با $\mathbf{A}$ اندازه‌پذیر است، در نظر می‌گیریم. داریم:

$$\mathbf{C} = \sqrt{۲}\left(۵\sqrt{۲} + ۲\sqrt{۱۵}\right) = ۱۰ + ۲\sqrt{۳۰}$$

$$۲\sqrt{۳۰} > ۱۰ \Rightarrow \left(۲\sqrt{۳۰}\right)^{۲} - \left(۱۰\right)^{۲} = ۲۰$$

چون $\sqrt{۲۰}$ و $۲\sqrt{۳۰}$ در قوت اندازه‌پذیر است؛ پس $\mathbf{C}$ ذوالاسمین پنجم است.

ج. خط دیگری مثل $\mathbf{D} = \sqrt{۳}\left(۵\sqrt{۲} + ۲\sqrt{۱۵}\right)$ را که آن هم در قوت با $\mathbf{A}$ اندازه‌پذیر است، در نظر می‌گیریم و داریم:

$$\mathbf{D} = \sqrt{۳}\left(۵\sqrt{۲} + ۲\sqrt{۱۵}\right) = ۵\sqrt{۶} + ۶\sqrt{۵}$$

$$۶\sqrt{۵} > ۵\sqrt{۶} \Rightarrow \left(۶\sqrt{۵}\right)^{۲} - \left(۵\sqrt{۶}\right)^{۲} = ۳۰$$

از آنجا که $\sqrt{۳۰}$ با $۵\sqrt{۶}$ در قوت اندازه‌پذیر است؛ خط $\mathbf{D}$ ذوالاسمین ششم است.

قضیهٔ۷۴: اگر $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ $(\mathbf{A} > \mathbf{B})$ دو خط اندازه‌ناپذیر در قوت باشند و $\mathbf{A}^{۲} + \mathbf{B}^{۲}$ موسّط و $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ گویا باشد، در این حالت گوییم $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ خطی است که با یک سطح گویا یک کل موسّط پدید می‌آورد.

می‌دانیم $(\mathbf{A} - \mathbf{B})^{۲} = \left(\mathbf{A}^{۲} + \mathbf{B}^{۲}\right) - \left(۲\mathbf{A} \times \mathbf{B}\right)$؛ یزدی برای اثبات گنگ بودن خط $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ در این قضیه، با اشاره به قضیهٔ ۲۰ می‌گوید چون $\left(\mathbf{A}^{۲} + \mathbf{B}^{۲}\right)$ و $\left(۲\mathbf{A} \times \mathbf{B}\right)$ موسّط هستند، تفاضل این دو گنگ است پس $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ گنگ است. یزدی در آوردن برهان برای این قضیه اشتباه کرده است زیرا بنا به فرض قضیه، $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ موسّط نیست بلکه گویا است و طبری هیچ اشاره‌ای به این اشتباه نمی‌کند. طبری در باقی قضایا نیز حرف چندانی برای گفتن ندارد، یا تکرار مکررات می‌کند یا با مثالی غلط سعی دارد برداشت خود را با قضیه تطبیق دهد.

نتیجه‌گیری

تعلیقهٔ طبری عمدتاً بر پایهٔ مثال‌های عددی است که در بسیاری از موارد به دلیل عدم درک بحث اصلی مقالهٔ دهم، اشتباه هستند. جز آن عبارت او تکرار مکررات است و در خلال مراحل اثبات قضایا مدام به قضایای دیگر اصول ارجاع داده است که این ارجاعات بی‌مورد هستند. طبری تقریباً هیچ اشاره‌ای به مطالب مفیدی که یزدی در خلال قضایا بیان می‌کند، نکرده و شاید این‌طور بتوان برداشت کرد که از نظر او یزدی زیاد به حاشیه رفته است و به همین خاطر سعی دارد بیشتر همان تحریر طوسی را توضیح دهد چیزی که اصلاً در آن موفق نیست. در کل می‌توان گفت تعلیقهٔ طبری اثری بسیار ضعیف و پر از اشتباه است و اصولاً کسی که بحث سادهٔ اندازه‌پذیری را در مقالهٔ دهم درک نکرده است، نمی‌تواند در مورد بحث پیچیدهٔ خطوط گنگ مرکب معرفی شده در این مقاله حرفی برای گفتن داشته باشد حال آنکه شرح دیگری که در دورهٔ قاجار نوشته شده است، یعنی شرح ملا محمدحسین نطنزی کاشانی به خوبی از عهدهٔ شرح مطالب غامض مقالهٔ دهم اصول برآمده است.

منابع

اخوان مهدوی، محمود. (۱۳۸۷ش). شرح اصول اقلیدس (مقالهٔ دهم) حاج ملا محمدحسین نطنزی کاشانی. قم: انتشارات مجمع ذخایر اسلامی.

پورنجف، زهرا. (۱۳۹۱ش). «مقالهٔ دهم اصول اقلیدس و سیر پیشرفت مفهوم کمیت‌های گنگ از تمدن یونانی تا دورهٔ اسلامی». دو فصلنامهٔ میراث علمی اسلام و ایران. سال اول (شمارهٔ اول)، ص ۶۹-۸۰.

ـــــــ . (۱۳۹۲ش). ویرایش، ترجمه و شرح «شرح مقالهٔ دهم اصول اقلیدس» تألیف محمدباقر یزدی، پایان نامه برای دریافت درجهٔ کارشناسی ارشد تاریخ علم. پژوهشکدهٔ تاریخ علم دانشگاه تهران.

ـــــــ . (۱۳۹۳ش). «قضیهٔ اول مقالهٔ دهم اصول اقلیدس و چالش‌های پیرامون آن در بین دانشمندان اسلامی». مجلهٔ تاریخ علم، دورهٔ ۱۲ (شمارهٔ ۱)، ص ۱-۱۵.

حسینی اشکوری، احمد. فهرست نسخه‌های خطی مرکز احیاء میراث اسلامی، ج۵. قم: مجمع ذخائر اسلامی.

درایتی، مصطفی. فهرست‌وارهٔ دستنوشت‌های ایران (دنا)، تهران: کتابخانه و مرکز اسناد مجلس شورای اسلامی.

قربانی، ابوالقاسم. (۱۳۷۵ش). زندگی‌نامهٔ ریاضی‌دانان دورهٔ اسلامی. تهران: مرکز نشر دانشگاهی، چاپ دوم.

مجموعهٔ رسائل ریاضی و نجومی خواجه نصیرالدین طوسی (۱۳۸۹ش)، به کوشش فرید قاسملو. تهران: انتشارات دانشگاه آزاد اسلامی.

نصیرالدین طوسی. (۱۳۶۱ش). اساس الاقتباس. به تصحیح مدرس رضوی. تهران: انتشارات دانشگاه تهران.

Ben Miled, Ali Marouane. (1999). "Les commentaires d'al-Māhānī et d'un anonyme du Livre X des *Éléments* d'Euclide". *Arabic Science and Philosophy*, vol. 9 (issue 01).

Heath, Thomas (1956). *The Thirteen books of Euclid's Elements*, 3 vols. Cambridge University press.

Naṡīruddīn Ṫūsī. (2013). Tahriru Usuli'L-Hendese Ve'L-Hisab [Eukleides'In Elemanlar Kitabının Tahriri]. Fazlioğlu İ. İstanbul: Türkiye Yazma Eserler Başkanlığı Yayınları.