تاریخ علم، دورهٔ ۱۳، شمارهٔ ۱، بهار و تابستان ۱۳۹۴، ص۱ ــ ۳۰

نسبت تألیفی: تحقیق و تصحیح رسالهٔ تألیفیه اثر ابواسحاق کوبنانی

حسن امینی*
استادیار، پژوهشکدهٔ تاریخ علم،دانشگاه تهران
hasanamini@ut.ac.ir

ابوذر فرض‌پور ماچیانی
کارشناس ارشد تاریخ علم، پژوهشکدهٔ تاریخ علم، دانشگاه تهران
afarzpourmachiani@yahoo.com
(دریافت: ۱۳۹۶/۰۶/۰۷، پذیرش: ۱۳۹۶/۰۸/۰۷)

چکیده

واسطهٔ هارمونیک، که از نسبت تألیفی یا همان نسبت هارمونیک به دست می‌آید، در کنار دو واسطهٔ حسابی و هندسی، سه مقدار متوسط اصلی در ریاضیات قدیم را مشخص می‌کردند. در مقالهٔ پیش رو قصد داریم تا جایگاه و تاریخچهٔ این نسبت را در طول زمان مشخص کنیم. بنا بر این در بخش اول این نسبت و روابط منتج از آن معرفی می‌شوند. در بخش دوم تاریخچهٔ مرتبط با این نسبت بیان می‌شود. در بخش سوم رسالات به جامانده از دورهٔ علم اسلامی که به طور جداگانه به این نسبت مربوط می‌شوند معرفی می‌شوند. در بخش چهارم اطلاعات لازم در بارهٔ کوبنانی و رسالهٔ تألیفیه بیان شده است. در بخش پنجم متن تصحیح شدهٔ رسالهٔ تألیفیه اثر ابو اسحاق کوبنانی که مهم‌ترین اثر در این زمینه است به همراه توضیحات ریاضی آن آمده است.

کلیدواژه‌ها: ابواسحاق کوبنانی، تاریخ ریاضی، نسبت تألیفی، واسطهٔ هارمونیک.

در بارهٔ نسبت تألیفی

تناسب تألیفی (یا نسبت تألیفیه) رابطه‌ای است بین سه عدد چنان‌که نسبت تفاضل عدد بزرگ‌تر و میانی به تفاضل عدد میانی و کوچک‌تر، برابر باشد با نسبت عدد بزرگ‌تر به عدد کوچک‌تر:

$$\frac{c-b}{b-a}=\frac{c}{a} \quad a<b<c \qquad (۱)$$

در این‌صورت روابط زیر برقرار خواهد بود:

$$\frac{۱}{a}+\frac{۱}{c}=\frac{۲}{b} \qquad (۲)$$

$$b=\frac{۲ac}{a+c} \qquad (۳)$$

$$\mathrm{H}=\frac{n}{\frac{۱}{x_۱}+\frac{۱}{x_۲}+\cdots+\frac{۱}{x_n}} \qquad x_i>۰ \quad (۴)$$

از رابطهٔ (۱) که همان تعریف نسبت تألیفی است می‌توان دو رابطهٔ دیگر را به دست آورد. رابطهٔ (۲) به این معناست که $\frac{۱}{b}$ واسطهٔ حسابی بین $\frac{۱}{c}$ و $\frac{۱}{a}$ است و رابطهٔ (۳) به این معنا است که b واسطهٔ تألیفی یا واسطهٔ توافقی بین a و c است. در واقع رابطهٔ (۳) حالت خاص این نوع واسطه است که واسطهٔ هارمونیک نیز نامیده می‌شود و معادلهٔ کلی آن رابطهٔ (۴) است. واسطهٔ هارمونیک یکی از سه واسطهٔ فیثاغورسی است. برای تمام مجموعه‌هایی که شامل حداقل یک جفت مقدار نامساوی باشند، واسطهٔ هارمونیک همیشه کوچک‌ترین واسطه است و واسطهٔ حسابی بزرگ‌ترین واسطه است و واسطهٔ هندسی همیشه میان آن دو است (کونگ،[1] ص۵۴).

کاربرد نسبت تألیفی در موسیقی

نسبت هارمونیک یکی از سه نسبت متداولی است که در رساله‌های مربوط به موسیقی در یونان قدیم از آن یاد می‌کردند. نخستین بار نظریهٔ موسیقی افلاک، که در مکتب

1. Kung

افلاطونی دارای اهمیت بود، درکتاب راهنمای هارمونی[1] از نیکوماخوس (۶۰-۱۲۰م) آمده است. او در باب هشتم با عنوان «تبیین آنچه افلاطون در تیمائوس هارمونیک می‌نامد» به شرح بخش 36a-b از تیمائوس افلاطون می‌پردازد و توضیح می‌دهد که فاصلهٔ مضاعف[2] بین ۱۲ و ۶ است که دو واسطهٔ ۸ و ۹ در آن وجود دارد. از این دو، ۸ واسطهٔ هارمونیک است زیرا به اندازهٔ یک سوم ۶ از شش بیشتر است و به اندازهٔ یک سوم ۱۲ از ۱۲ کمتر است و فاصلهٔ بیشترین از واسطه یعنی ۴ هم دوبرابر فاصلهٔ کمترین از واسطه یعنی ۲ است. او اضافه می‌کند ویژگی این نسبت این است که حاصل‌ضرب جمع بزرگ‌تر و کوچک‌تر در واسطه یعنی ۱۴۴ دو برابر حاصل‌ضرب کوچک‌تر در بزرگ‌تر یعنی ۷۲ است. واسطهٔ دیگر، یعنی ۹، واسطهٔ حسابی است (بارکر،[3] ص۲۶۰).

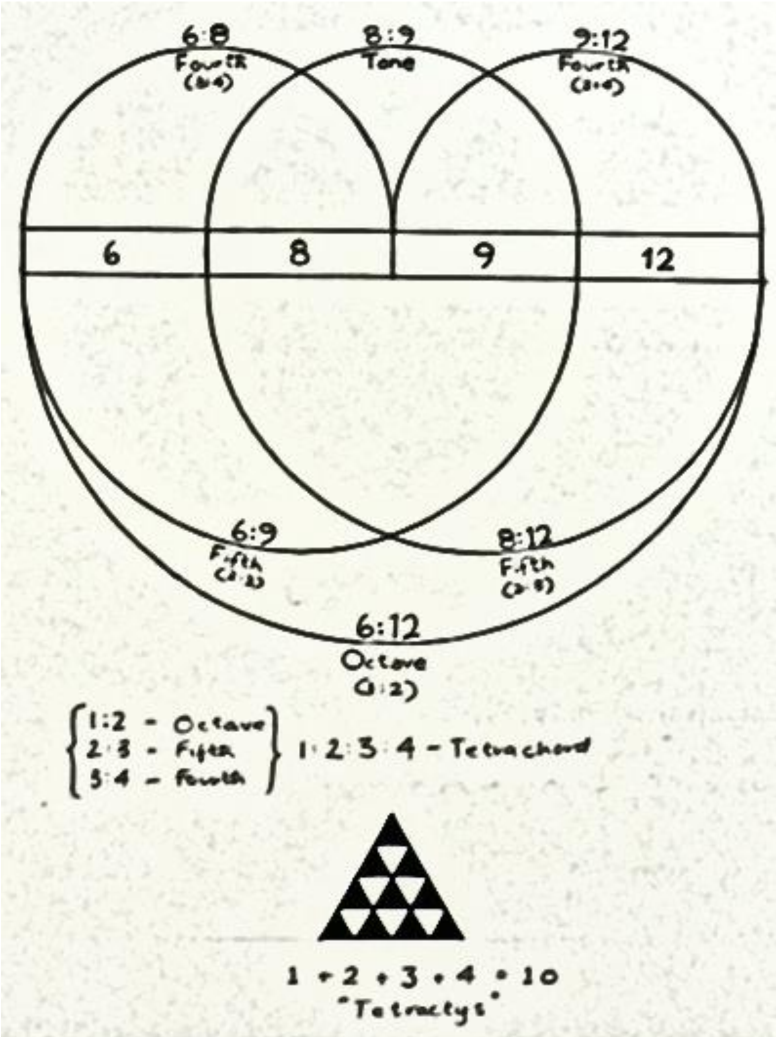
کتاب واجد اهمیت دیگر، رسالهٔ دربارهٔ موسیقی[4] از آریستیس کوینتیلانوس[5] است. باب پنجم از مقالهٔ دوم این کتاب به بررسی واسطه‌های هارمونیک، هندسی و حسابی اختصاص دارد. کوینتیلانوس که احتمالاً در قرن اول بعد از میلاد می‌زیسته است، هدفش را از نگارش این کتاب، چنان‌که خودش اظهار می‌دارد، جمع‌آوری تمام موارد مربوط به موسیقی دانسته است. سه‌گانه‌های حسابی، هندسی و هارمونیک را به ترتیب با ۲،۳،۴ و ۲،۴،۸ و ۳،۴،۶ معرفی می‌کند. او در باب ۶ اعداد مختلف را براساس اینکه نشان‌گر چه چیزی هستند معرفی می‌کند و عدد ۱۲ را از نظر موسیقیایی منحصر به فرد می‌داند زیرا ۴، ۶، ۸ و ۹ هرکدام به آن دارای نسبتی هستند که طبیعت ما قادر است روی آن تُن صدا را تغییر دهد (بارکر، ص۳۹۲-۳۹۴).

این نظریه در کتاب اصول موسیقی[6] بوئتیوس[7] به شکل دقیق در مورد نسبت‌ها بیان شده است. این کتاب پس از چاپ در دورهٔ رنسانس در ایتالیا یکی از منابع اصلی نظریهٔ موسیقی شد. مشکل اساسی این بود که با چهار رقم اصلی یعنی ۱،۲،۳،۴ (تتراکورد)

---

1. *Enchiridion*
2. Duple Interval
3. Barker
4. *De Musica*
5. Aristides Quintilianus
6. *De institutione musica*
7. Boethius

نمی‌شد نسبت $\frac{۹}{۸}$ را بازسازی کرد که نقش مهمی در ساختمان آن نوع موسیقی مبتنی بر عدد ۱۲ دارد، بنا بر این به ۸ به عنوان واسطهٔ هارمونیک نقش مهمی داده شد (چادویک،[1] ص۷۸).



شکل۱. نسبت‌های هارمونیک در موسیقی

1. Chadwick

در رساله‌هایی که از دورهٔ اسلامی باقی مانده است در بیان وجه تسمیهٔ نسبت تألیفیه اشاره می‌شود که به آن نسبت مؤلفه و تناسب تألیفی نیز می‌گویند زیرا با موسیقی در ارتباط است و موسیقی صناعت تألیف نامیده می‌شده است (برای نمونه نک : رساله‌های شمارهٔ ۲ ، ۵ و ۶). البته باید در نظر داشت که تألیف نسبت در موسیقی با تألیف نسبت در ریاضیات متفاوت است، «نسبت مؤلفه» در ریاضیات دورهٔ اسلامی تعریف دیگری دارد و آن نسبتی است که، به زبان امروزی، از حاصل‌ضرب دو نسبت دیگر به‌دست بیاید، چنان که در رابطهٔ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \times \frac{e}{f}$ نسبت $\frac{a}{b}$ مؤلف است از $\frac{c}{d}$ و $\frac{e}{f}$ (بیرونی، راشیکات الهند، ص۴؛ همو، التفهیم، ص۲۳). خیام نیز در رسالهٔ حل ما اشکل من مصادرات اصول اقلیدس در مقالهٔ سوم که «فی تألیف النسبة و تحقیقه» نام دارد به همین نکته اشاره کرده است که تألیف نسبت در موسیقی با این تألیف نسبت متفاوت است (همایی، ص۱۵۳-۱۵۵) و منظور از آن در موسیقی، ترکیب و نقصان است. خیام در ادامه می‌نویسد که اقلیدس در مقالهٔ هشتم به این نسبت که برخی اجزای موسیقی بر آن مبتنی است پرداخته است، اما با توجه به اینکه در مقالهٔ هشتم اصول به طور مستقیم به نسبت هارمونیک اشاره‌ای نشده است احتمال می‌رود که این مقالهٔ هشتم باید مقاله‌ای از کتاب اصول موسیقی اقلیدس باشد که خیام در ادامه اشاره می‌کند که در شرح مشکلات آن رساله‌ای نوشته است. اگرچه نه چنین رساله‌ای از خیام به جا مانده است (همایی، ص۳۸۸-۳۴۰) و نه چنین کتابی از اقلیدس، البته دو کتاب در بارهٔ موسیقی به اقلیدس منتسب هستند (بالمر-تامس،[1] ص۴۳۰-۴۳۱). از طرف دیگر مقالهٔ هشتم اصول با موسیقی در ارتباط است و به خصوص قضایای چهارم و پنجم آن می‌توانند با ترکیب نسبت زمینهٔ ریاضی خوبی برای بیان نظریهٔ موسیقی فراهم آورند (بلیسیما،[2] ص۱۸۳)، بنا بر این می‌توان این احتمال را هم داد که خیام به مقالهٔ هشتم اصول اقلیدس اشاره می‌کند. او در ادامه متذکر می‌شود که نقصان و ترکیبی که در موسیقی مراد از تألیف نسبت است با هم معادل هستند و برای به دست آوردن آنها راه مشترکی وجود دارد (خیام، ص۲۱۸).

در دورهٔ اسلامی، به نظر می‌رسد که ابن سینا نسبت تألیفی را در ایقاع، که بخشی از صنعت تألیف یا همان موسیقی است، دارای کاربرد دانسته است. این نکته در رسالهٔ

1. Bulmer-Thomas
2. Bellissima

فائدة حسابية من كفاية المنصورية (رسالهٔ شمارهٔ ۲) آمده است و نویسندهٔ رساله در ادامه توضیح داده است که وجه تسمیه می‌تواند به این دلیل باشد که نسبت طرفین مؤلف است از نسبت فضلین و این در ظاهر مشخص نیست زیرا دو نسبت یکی هستند و از خودشان نسبتی تألیف نمی‌شود و ابن سینا چنین اشتباهی نمی‌کند و این ممکن است سهواً باشد یا اشتباه نقل‌کنندهٔ کلام ابن سینا باشد.

ابن سینا در فصل دوم از مقالهٔ دوم از جوامع علم موسیقی از بخش ریاضیات کتاب شفا که در بارهٔ تضعیف و تصنیف است به نسبت تألیفی اشاره می‌کند. در این بخش او راه یافتن تضعیف و تصنیف را برای فواصل موسیقایی توضیح می‌دهد. او توضیح می‌دهد که برای انجام تضعیف باید سه عدد را حساب کنیم، عدد کوچک‌تر مربع مخرج است و عدد بزرگ‌تر مربع صورت و عدد وسط حاصل‌ضرب مخرج در صورت، برای مثال در تضعیف نسبت ذی الخمس، یعنی سه دوم، سه عدد ۴،۶،۹ به دست می‌آید که در آن نسبت فاصلهٔ ۹ و ۶ به فاصلهٔ ۶ و ۴ سه دوم است. او در ادامه می‌گوید که انجام عکس این کار ساده نیست زیرا باید که اعداد مربع کامل باشند تا بتوان از آنها جذر گرفت و اگر چنین نباشند راهی برای «ایقاع[1] نسبت منطوق» وجود ندارد یعنی نمی‌توان واسطهٔ هندسی را که نسبت گویایی باشد به دست آورد، بنا بر این می‌توان به‌جای آن از واسطهٔ تألیفی یا واسطهٔ عددی استفاده کرد. او ابتدا روشی برای انجام این کار با استفاده از واسطهٔ حسابی می‌دهد و سپس بر اساس واسطهٔ تألیفی روش دیگری را شرح می‌دهد. او رابطهٔ $\frac{c-a}{b-a}=\frac{c+a}{a}$ را معرفی می‌کند که در آن b که واسطهٔ تألیفی است از روی بقیه جملات قابل محاسبه است. او این کار را برای نسبت طنینی یعنی نُه هشتم انجام می‌دهد که نتیجهٔ آن $8\frac{8}{17}$ است که از واسطهٔ حسابی کمتر است ولی در فواصل کم تخمین خوبی برای آن محسوب می‌شود. او در ادامه متذکر می‌شود که برای تقسیم‌های دیگر غیر از تنصیف استفاده از واسطهٔ تألیفی دشوار است و بهتر است از واسطهٔ عددی استفاده شود (ص۳۸-۴۰).

---

۱. شاید وجود کلمهٔ ایقاع در این جمله باعث شده است که گمان شود منظور ابن سینا استفاده از نسبت تألیفی در ایقاع بوده که نادرست است زیرا ایقاع در واقع بخشی از علم تألیف است که به ساختار سکوت‌های موجود در نغمات می‌پردازد.

در رساله‌ای که در بارهٔ این نسبت در کتابخانهٔ مرکزی دانشگاه تهران موجود است (رسالهٔ شمارهٔ ۵) توضیح داده شده است که علمای فن موسیقی دو نسبت را در اصطلاحات خود دارند، یکی نسبت «مشمئزّه» و یکی «ملتذّه» که دومی را شارع مقدس منع کرده است مثلاً در دو تار تألیف نسبت ملتذه به این صورت است که اولی پنج نخ و دومی نُه نخ دارد، نواختن این دو به شرط دانستن عدد سوم است که التذاذ دارد. این توضیح نادقیق است و به نظر درست نمی‌رسد زیرا رابطهٔ میان نسبت هارمونیک و موسیقی را می‌توان بر اساس گام هارمونیک توضیح داد. اگر نتی با بسامد مشخصی داشته باشیم نت‌های که بسامدشان با آن یک تصاعد حسابی می‌سازد هم در گام‌های بالاتر ظاهر می‌شوند. بسامد هر نت حاصل از ارتعاش یک سیم با عکس طول سیم متناسب است بنا بر این طول سیم‌های متناظر با نت‌هایی که بسامدشان تصاعد حسابی می‌سازد تصاعد هارمونیک پدید می‌آورند که در آن طول سیم، واسطهٔ تألیفی میان طول سیم برای بسامد قبل و طول سیم برای بسامد بعدی است (باقری، ص۳۳).

باید در نظر داشت که نسبت تألیفی در موسیقی معنای دیگری جز این رابطهٔ خاص ریاضی نیز دارد. نسبت تألیفی در موسیقی به هر نسبتی گفته می‌شود که بین آواها برای ساختن نغمهٔ خوش رعایت می‌شود، و این بیش از یک نسبت خاص است. کتاب الرسالة الشرفیة فی‌النسب التألیفیة اثر عبدالمؤمن بن یوسف صفی‌الدین ارموی که در حدود سال ۶۶۶ق نوشته شده است به همین نسبت‌های موسیقیایی اختصاص دارد. این نسبت‌ها اگرچه بیان‌گر رابطه‌ای ریاضی بین آواهایی هستند که گوش‌نواز و موافق طبع‌اند اما ربط مستقیمی به نسبت تألیفی در معنای خاص ریاضی ندارند. با این حال باید در نظر داشت که برای مثال در این رساله نیز تقسیم‌بندی‌ای مشابه تقسیم‌بندی بوئتیوس آمده است، مثل دیگر کتاب‌های موسیقی نسبت نُه هشتم هم به عنوان طنینی معرفی شده است و نسبت چهار سوم هم که واسطه تألیفی بین یک و دو است به عنوان ذی الاربع در موسیقی دورهٔ اسلامی نقش محوری دارد اما به واسطه تألیفی بودن آن اشاره‌ای نمی‌شود (صفی الدین ارموی، ص۲۱-۲۵).

تاریخچه

پروکلس در بخشی از خلاصهٔ ائودوموسی[۱] گفته است که نظریهٔ تناسب‌ها کشف فیثاغورس است. نظریهٔ واسطه‌ها اما در همان مکتب فیثاغورسی و در اثر ارتباط آن با حساب و موسیقی به وجود آمد. به گفتهٔ او در زمان فیثاغورس سه واسطهٔ حسابی و هندسی و جزء تضادی وجود داشتند که نام سومی را آرخوتاس[۲] (حدود ۳۷۵ق م) و هیپاسوس[۳] (مشهور در سدهٔ ۵ق م) به همساز[۴] تبدیل کردند. در کتاب در بارهٔ موسیقی آرخوتاس سه واسطهٔ هندسی تعریف شده‌اند و تعریف سومی به این صورت است که نسبت تفاضل دومی از اولی بر اولی مساوی باشد با نسبت تفاضل سومی از دومی بر سومی. یعنی رابطه زیر که معادل رابطهٔ (۱) است:

$$\frac{b-a}{a}=\frac{c-b}{c} \quad (۵)$$

گفته‌اند که فیلولائوس مکعب را یک همساز هندسی خوانده است زیرا تعداد رؤوس آن یعنی هشت واسطهٔ همساز میان تعداد وجوه آن یعنی شش و تعداد یال‌های آن یعنی دوازده است. نظریهٔ واسطه‌ها در مکتب فیثاغورسی گسترش پیدا کرد و هفت واسطهٔ دیگر بر این سه واسطه افزوده شد و تعداد آنها به ده واسطه رسید (هیث، تاریخ ریاضیات...، ص۵۱-۵۳). یکی از مسائلی که پاپوس به آن اشاره می‌کند و مسأله‌ای بحث برانگیز در ریاضیات یونانی است ، مسألهٔ نشان دادن سه واسطهٔ حسابی، هندسی و هارمونیک در یک نیم‌دایره است (براون،[۵] ص۵۶۸-۵۷۱؛ تامس،[۶] ص۱۷۳-۱۸۴).

هرون[۷] (مشهور در سدهٔ اول میلادی) برای استخراج ریشهٔ دوم از واسطهٔ هارمونیک استفاده کرده است. او برای برای محاسبهٔ ریشهٔ دوم دو عدد a و b از واسطه‌های حسابی

---

۱. بخشی از شرح پروکلس بر مقالهٔ اول اصول اقلیدس در بر دارندهٔ مطالبی بسیار گزیده در بارهٔ تاریخ ابتدایی هندسه در یونان است. به نظر می‌رسد این مطالب برگرفته از کتاب تاریخ هندسهٔ ائودوموس رودسی (قرن چهارم قبل از میلاد) باشد.

2. Archytas
3. Hippasus
4. Harmonic
5. Brown
6. Thomas
7. Heron of Alexandria

و هارمونیک استفاده می‌کند. اگر $a_{0} = a$ و $b_{0} = b$ آنگاه دو رابطهٔ $a_{k+1} =$ $\mathrm{H}(a_n, b_n)$ و $b_{k+1} = \mathrm{A}(a_n, b_n)$ $(k \geq 0)$ که H واسطهٔ هارمونیک و A واسطهٔ حسابی است، برقرار هستند. ثابت شده است که دنباله‌های $(a_k)_{k\geq 0}$ و $(b_k)_{k\geq 0}$ به صورت یکنواخت به ریشهٔ مشترک $\sqrt{ab}$ میل می‌کنند، البته در زمان هرون این اثبات شناخته شده نبود و تنها روش محاسبه شناخته شده بود (تادر،[1] ص۷-۸).

در دورهٔ اسلامی به جز مواردی که از خیام و ابن سینا نقل شد که اولی به تمایز آن با تألیف نسبت اشاره داشت و دومی به کارکرد آن در موسیقی، تا قرن نهم اشارهٔ دیگری به این نسبت نشده است، اما در ابتدای این قرن یک معما که به شکل دوبیتی در کتاب حلل مطرز شرف‌الدین علی یزدی (نک : دنبالهٔ مقاله) آمده است باعث شد که این تناسب دوباره مورد توجه قرار بگیرد. این دو بیتی در برخی نسخ حلل مطرز به این صورت است:

چه در تناسب تألیف اوفتد نه و پنج
بگیر ثالث آن را شرف به فکر صحیح
کمال دوری اوسط بدیل اصغر ساز
که هست زهرهٔ زهرا شبیه ام مسیح

در توضیح باید گفت که این معما به یافتن جزء ثالث از تناسب تألیفی که عدد اصغر آن ۵ و عدد اوسط ۹ باشد اختصاص دارد. در این تناسب تألیفی جزء ثالث یا همان عدد اعظم ۴۵ است و «کمال دوری» یعنی مربع اوسط برابر ۸۱ است. با جایگزینی این اعداد به ترتیبی که در شعر گفته شده سه عدد ۸۱، ۹ و ۴۵ را خواهیم داشت که به حساب ابجد به ترتیب معادل «فا»، «ط» و «مه» می شود. در واقع این معما بدون نیاز به تناسب تألیفی هم قابل حل است زیرا ۴۵ «کمال ظهوری» یا همان مجموع اعداد قبل از عدد ۹ است (برای آشنایی با این اصطلاحات نک : دنبالهٔ مقاله).

آنچه در مورد نسبت تألیفی در متون متأخر دورهٔ اسلامی می‌توان گفت این است که دیگر به عنوان نسبتی موسیقیایی مورد توجه نبوده است، بلکه پس از بیان معمای آن توسط شرف‌الدین یزدی و علی‌رغم اختصاص رساله‌ای به آن توسط کوبنانی، تبدیل به

1. Toader

یک «فائدهٔ حسابی» شده بوده است. «فائده» نکته‌ای کوچک در علمی خاص است که در ضمن آثار عمومی که نکاتی از علوم مختلف را جمع می‌آوردند بیان می‌شده است. از همین روست که این شکل از نکات حسابی دارای واژگانی است که با واژگان شناخته شدهٔ ریاضی در دورهٔ اسلامی متفاوت است. آن‌چه اما به طور خاص در مورد این رساله جلب نظر می‌کند، اصطلاحاتی است که کوبنانی به تبعیت از شرف‌الدین علی یزدی به کار می‌گیرد، برای مثال «کمال ظهوری» که برابر است با مجموع اعداد از یک تا آن عدد با احتساب خود عدد و «کمال دوری» یا «کمال شعوری» که برابر است با مجموع اعداد از واحد تا آن عدد با احتساب خود عدد و از آن عدد تا واحد بدون احتساب خود عدد، که حاصل آن برابر با توان دوم یک عدد است. شرف‌الدین علی یزدی خوددر حلل مطرز در پیرایهٔ چهارم از طراز دوم از حله پنجم در این باره توضیح می‌دهد که کمال دوری یا شعاعی را در قسم مفتوحات[۱] از علم حساب مجذور و آن عدد را جذر می‌گویند و در قسم مساحت از مجذور به مربع تعبیر می‌کنند و از جذر آن به ضلع و در جبر و مقابله آن را مال و عدد را شی نام می‌نهند (برگ ۲۳۴).

بهترین شاهد این مدعا کتاب مشکلات العلوم اثر ملا محمد مهدی نراقی (۱۱۲۸-۱۲۰۹ق) است که هم نسبت تألیفی و هم این اصطلاحات در آن آمده است. در این کتاب علاوه بر معمای معروف شرف‌الدین یزدی در بارهٔ نام حضرت فاطمه(س)، معمای دیگری از نصیر همدانی آمده است که با نسبت مؤلفه حل می‌شود.[۲] دو بیتی از این قرار است:

در نسبت مؤلفه چون سی و ده فتاد
اصغر بجوی و ساز مقدم بر اعظمش
تا جلوه‌گر شود ز نهانخانهٔ خیال

---

۱. تهانوی ذیل علم العدد می‌نویسد که استخراج مجهولات عددی از معلومات دو حالت دارد، حالت اول این است که احتیاج است تا مجهول را چیزی فرض کنیم که به آن جبر و مقابله می‌گویند و حالت دوم به این‌که از ابتدا مجهول را چیزی فرض نمی‌کنیم که به آن مفتوحات گفته می‌شود مثل مقدماتی از حساب به جز مساحت، یا آن‌چه با استفاده از این مقدمات و برخی قوانین نسبت به دست می‌آید و شامل حساب خطأین نیز می‌شود (ص۵۸) در ذیل حساب گفته است که محاسبات بفتح سین که مفتوحات هم گفته می‌شود آن بخش از کتاب‌های حساب سوای بخش مساحت و جبرو مقابله است (ص۶۶۴).

۲. جلال‌الدین همایی این دو بیتی را از میرزا نصیر اصفهانی دانسته است و در حل این معما مطلبی در مجلهٔ ارمغان سال ۱۳۰۸ شمسی نوشته است (همایی، خیامی‌نامه، ص۱۶۴-۱۶۵).

نـام بـتـی که شـادی دل‌ها بود غمش

بر اساس نسبت تألیفی سه عدد ۶، ۱۰، ۳۰ به دست می‌آید که با تعویض جای عدد بزرگ‌تر و واسطه کلمهٔ «ولی» جواب معما خواهد بود. همچنین معمای کوتاه دیگری هم آورده شده که با استفاده از کمال ظهوری و کمال شعوری حل می‌شود (ص۳۸-۴۱). در کتاب خزائن نوشتهٔ احمد بن مهدی نراقی (۱۱۵۰-۱۲۰۸ق)، پسر ملا محمد نراقی نیز قاعده‌ای برای استخراج کمال ظهوری و شعوری عدد ذکر شده است که برای کمال ظهوری رابطهٔ $\frac{n(n+۱)}{۲}$ را بیان می‌کند (ص ۲) و معماهایی هم برای آن ذکر می‌کند (ص۱۷۸).

آن‌چه باید در نظر داشت این است که چنین معماهایی عموماً به نوعی با عقاید مذهبی و در این مورد خاص با عقاید شیعی در ارتباط بودند و ارتباط سری علم اعداد را با این عقاید نشان می‌دادند. چنان که در رابطه با معمای در بارهٔ اسم حضرت فاطمه(س) دیدیم و حکایت از وجود کمال ظهوری و شعوری در ابجد اسم ایشان داشت، و از دلالت اسرار اعداد بر حقانیت ایشان خبر می‌داد. این چنین گرایشی را در شرف‌الدین علی یزدی، که در دورهٔ آل مظفر و تیموریان می‌زیست، می‌توان نشانهٔ نفوذ گرایش‌های شیعی در این دوران در نواحی مرکزی ایران است. در این دوره نوشتن آثاری دربارهٔ معما و لغز رواج داشتند، این را می‌توان از نسخه‌های به‌جا مانده از کتاب حلل مطرز نیز دریافت که تعداد آنها به حدود پنجاه می‌رسد (درایتی، ج۴، ص۷۶۲-۷۶۳). البته این معما در آثار دیگر نویسندگان شیعی تا قرن چهاردهم به چشم می‌خورد چنان که در کتاب مصباح الحرمین می‌توان دید که در سال ۱۳۲۱ توسط مولی عبدالجبّار بن زین العابدین شکویی نوشته شده است (ص۳۴۲).[۱] در واقع می‌توان به سیر تحول تناسب تألیفی به عنوان شاخص خوبی برای تغییر نگاه به حساب و علم الاعداد از قرن نهم هجری نگاه کرد که این علم نیز مانند برخی علوم دقیقهٔ دیگر اعتبارش را از ارتباط با علوم مذهبی می‌توانست اتخاذ کند.

---

۱. همچنین در نسخهٔ خطی فارسی با عنوان « رمزگشایی کمال ظهوری و کمال شعوری و کمال دوری از اسم حضرت فاطمه(س)» از قرن سیزدهم که در کتابخانه دانشگاه امام صادق به شمارهٔ ۸۳۳۱۷ (۵۸ر-۵۸پ.) نگهداری می‌شود.

در بارهٔ رسالهٔ تألیفیه

احوال و آثار کوبنانی

ابواسحاق شیخ زاده ابن عبداللّه خادم برهانی کوبنانی (کوهبنانی)، در قرن نهم و در کوهبنان، منطقه‌ای در صد و پنجاه کیلومتری شمال غربی شهر کرمان، می‌زیسته است. او مدتی را نیز در شهرهای دیگر از جمله ساری، کرمان، یزد، بندرعباس و جزیرهٔ هرمز گذرانده است. اطلاع چندانی از زندگی وی در دست نیست و آنچه در بارهٔ او می‌دانیم نیز عمدتاً مبتنی بر منشآت او است که به دست ما رسیده است. از همین طریق می‌دانیم که گرچه «پایبند جمعی عیال و اطفال شکسته‌بال و سراسیمه‌احوال» بوده اما مدتی در مدرسهٔ سعدیه، مدرسه‌ای احتمالاً در کرمان که خودش نیز در آن تحصیل کرده، به تدریس علوم عقلی و نقلی اشتغال ورزیده است. او در ریاضیات، نجوم، فلسفه، موسیقی، شعر و ادب دست داشته است.

او دو برادر به نام‌های برهان و نجم‌الدین محمود داشته که نجم‌الدین نیز به کار علمی اشتغال داشته است. نجم‌الدین محمود شرحی بر مجسطی بطلمیوس نوشته که دیباچهٔ آن را ابواسحاق در منشآت آورده است. همچنین ترجمهٔ فارسی کتاب اعمال هندسی از ابوالوفای بوزجانی از ابواسحاق نیز تکمیل کار نجم‌الدین است.[۱]

کوبنانی آثاری در زمینهٔ نجوم و ریاضی به رشتهٔ تحریر درآورده است که در میان آنها رساله‌های منفرد، ترجمه و حاشیه و شرح دیگر آثار نیز وجود دارد. آثار نجومی او عبارتند از رسالهٔ حل مسألة الإقبال و الإدبار، شرح زیج ایلخانی، شرح سی فصل طوسی و رسالهٔ هیأت. حاشیهٔ شرح الملخص که حاشیه‌ای است بر شرح قاضی‌زادهٔ رومی بر ملخص چغمینی نیز از آثار او است. از آثار ریاضی او یکی رسالهٔ تألیفیه است که در ادامهٔ این مقاله به آن پرداخته می‌شود. رسالهٔ تضعیفیه اثر دیگری از او است که موضوع آن حل مسألهٔ خانه‌های شطرنج است و مانند رسالهٔ تألیفیه به توضیح بخشی از کتاب حلل مطرز مربوط می‌شود. شرح شمسیة الحساب، چنان‌که از عنوانش برمی‌آید شرح

---

۱. صالح احمد العلی در مقدمه رسالهٔ ما یحتاج الیه الصانع من الأعمال الهندسیة گفته است که نجم‌الدین محمود در سدهٔ هفتم هجری قمری می‌زیسته است که با توجه به گفتهٔ خود کوبنانی در مورد نسبت برادری وی و نجم‌الدین محمود، این نظر درست نمی‌نماید، افزون بر این صالح احمد العلی گفته است که کوبنانی این ترجمه را با کمک چهار تن از شاگردان خود انجام داده است ولی کوبنانی هیچ اشاره‌ای به این مطلب نکرده است (کرامتی، ص۱۷۴). ویکه اما در مقاله‌اش با ارجاع به صفحهٔ ۱۷۹ نسخهٔ خطی رساله در کتابخانهٔ پاریس به این‌که چهار تن از شاگردان وی در ترجمهٔ نقش داشته‌اند اشاره می‌کند (ص۳۵۸-۳۵۹).

کتابی از نظام اعرج نیشابوری است (قربانی، ص۶۰-۶۱؛ روح‌الامینی، ص۴۲-۴۹؛ کرامتی، ذیل ابواسحاق کوبنانی؛ باقری، ص۳۱-۳۴). کوبنانی رساله‌ای به نام صنعة الاسطرلاب در یک مقدمه و چهارده فصل کوتاه نیز دارد که از آن نسخه‌ای متعلق به سال ۱۰۳۹ در کتابخانهٔ مرعشی در قم باقی مانده است (حسینی، ص۲۸۸). شناخته شده‌ترین اثر او ترجمهٔ فارسی کتاب ابوالوفای بوزجانی در اعمال هندسی است. عنوان کتاب بوزجانی رسالة ما یحتاج الیه الصانع من الاعمال الهندسیة است. او در انتهای رساله اشاره می‌کند که این ترجمه تکمیل کار برادرش نجم‌الدین محمود است که در ایام جوانی درگذشته است (نک : ویکه،[1] ص۳۵۸-۳۵۹).

حلل مطرز

رسالهٔ تألیفیه، شرح فصلی از کتاب حلل مطرز شرف‌الدین علی یزدی[2] دانشمند قرن نهم هجری (متوفی ۸۵۸ هجری) است که کوبنانی با احترام زیاد از او با عنوان حضرت مخدومی یاد می‌کند. این رساله بر خلاف آثار دیگری که کوبنانی در نوشته‌های خود به آنها پرداخته است، دارای ارزش علمی چندانی نیست. به نظر می‌رسد که این کار او را می‌توان بیشتر به سبب رابطه‌اش با شرف‌الدین علی یزدی دانست، و از طرف دیگر این احتمال را که شاید هر دو در یک جا به کار علمی مشغول بوده‌اند هم می‌توان در نظر داشت.

شرف‌الدین علی یزدی در فن معما و لغز دستی داشته است و اگرچه متخلص به شرف بوده است اما با لقب معمایی نیز از او یاد شده است. او الحلل المطرز فی فن التعمیة و اللغز و منتخب یا مختصر آن را به امر ابوالفتح ابراهیم سلطان پسر شاهرخ حاکم فارس نوشته است که موضوع آن چیستان‌های گوناگونی است که عموماً به نظم هستند. در حدود پانصد بیت از چنین معماهایی در این کتاب آمده است. سال تألیف این رساله احتمالاً ۸۲۸ یا ۸۳۲ هجری قمری است و نسخه‌ای قدیمی از آن به تاریخ

---

1. Woepcke

۲. ابن شیخ حاجی یزدی، ملقب به شرف‌الدین. ادیب و مورخ و شاعر نیمهٔ دوم قرن هشتم و نیمهٔ اول قرن نهم هجری قمری در یزد. وی مرید ملا حسین اخلاطی حروفی بود لذا او را اعتقادی راسخ به خواص حروف بوده است . سال درگذشت او را به اختلاف ۸۳۰، ۸۳۴، ۸۵۰، ۸۵۳ و ۸۵۸ هجری قمری ذکر کرده اند. از آثار او می‌توان به این موارد اشاره کرد: تمرنامه؛ حقائق التهلیل؛ حلل مطرز در معما و لغز؛ دیوان شعر؛ شرح قصیده بردة در مدح نبی؛ ظفرنامه؛ کتابی در اسطرلاب؛ کنه المراد در علم وفق اعداد؛ منتخب حلل؛ مواطن که غالب آنها در معما است (آقا بزرگ تهرانی، ج۹، ص۵۱۷؛ لغت نامهٔ دهخدا، ذیل علی یزدی).

کتابت پنجم ربیع الاخر ۸۵۳ در کتابخانهٔ آیت الله مرعشی موجود است (حسینی، ج۲۴، ص۲۸-۳۰). این رساله علاوه بر دیباچه مشتمل بر دو بخش است که هر بخش یک «اصل» نام دارد. اصل اول در بیان صور حروف و مجال بروز و ظهور آن و اصل دوم در تبیین معنی دلالت و اشارت به بعضی از وجوه و طرق آن. این اصل دوم است که خود بر پنج حله تقسیم می‌شود (برگ ۵و۷) و غالب فهارس بر ذکر این پنج حله بسنده کرده‌اند و گفته‌اند که به حسب تقسیم مؤلف مشتمل بر چند حله است و هر کدام از حلل دارای چند مطرز با عناوین جلوه، تنبیه، توشیح و مانند اینها است. اسامی حلل از این قرار است: ۱- در شرح ماهیت معما و لغز ۲- در نمایش و آرایش وجوهی متعلق به تکمیل صورت اسم ۳- در تحصیل ماده حرفی بحسب صورت کلامی ۴- در همان مقصد بحسب صورت کتابی ۵- در قواعدی مبتنی بر صورت معنوی عددی حروف (حاجی خلیفه، ج۱، ص۴۵۲، ذیل «حلل مطرز»).

شرف‌الدین یزدی در پیرایهٔ چهارم از طراز دوم از حله پنجم به مسألهٔ نسبت پرداخته است و سه نوع تناسب عددی، تناسب هندسی و تناسب تألیفی را بیان کرده است:

> معتبر در مناسبت تألیفی حال فضل حدود است و حال طرفین، و اما واسطه که در مناسبت عددی و هندسی تالی یک نسبت می‌باشد و مقدم آن دیگر اینجا در هیچ یک از نسبتین نه مقدم است و نه تالی. و فایدهٔ او تحصیل و تعیین دو فضل است که طرفین یک نسبت واقع می‌شوند، چه تناسب تألیفی عبارت از آن است که نسبت فضل بین الاعظمین به فضل بین الاصغرین مساوی نسبت طرف اعظم باشد به طرف اصغر. پس حدود چهارگانهٔ نسبتین متمایز باشند بالذات و اگر چه سه حدش مذکور نگردد، مانند دو و سه و شش، وشش و هشت و دوازده. و هر عدد فرد که فرض کنند واسطهٔ تألیفی باشد میان شطر اعظم[۱] او و مضروب شطر اعظم در او که کمال ظهوری او بود، مانند سه و پنج و پانزده، و پنج و نُه و چهل و پنج. استخراج واسطه از طرفین در این مناسبت آن است که مضروب تفاضل طرفین در اصغر را قسمت کنند به مجموع طرفین و خارج قسمت را بر اصغر افزایند، مثلاً اگر طرفین شش و هژده باشد به فرض، مضروب دوازده در شش را قسمت باید کرد بر بیست و چهار، و خارج قسمت را که سه بود بر شش افزود که حاصل واسطهٔ تألیفی بود میان شش و هژده، به این صورت شش و نُه و هژده. و در استخراج طرف اصغر از اوسط و اعظم فضل اعظم بر اوسط را

---

۱. برای اعداد فرد برابر است با عدد فرد بعلاوهٔ یک تقسیم بر دو.

در اوسط باید زد، و مقسوم حاصل ضرب بر مجموع آن فضل با اعظم را از اوسط کاستن، که باقی اصغر باشد. مثلاً اگر فضل هژده بر نُه که هم نُه است در نُه زنند و حاصل را بر بیست و هفت که مجموع فضل است با هژده قسمت کنند و خارج قسمت که سه خواهد بود از نُه بیندازند شش باقی ماند، که طرف اصغر است. و در استخراج طرف اعظم از اوسط و اصغر مضروب فضل اولی بر اصغر در اوسط را قسمت باید کرد بر اصغر الّا فضل، و خارج قسمت را بر اوسط افزود که حاصل طرف اعظم باشد. مثلاً اگر فضل نُه بر شش را در نُه زنند و بیست و هفت را به شش الّا فضل، که سه باشد، قسمت کنند خارج قسمت نُه بود، و چون بر نُه افزایند هژده حاصل شود، که طرف اعظم است. و در این نمط از تناسب مضروب مجموع طرفین در اوسط مساوی ضعف مسطح باشد، مثلاً در این صورت چهار و هفت و بیست و هشت، مضروب سی و دو در هفت، یعنی دویست و بیست و چهار، مساوی ضعف مسطح چهار در بیست و هشت است، یعنی صد و دوازده. (برگ۲۳۰-۲۳۱)

او در انتهای این پیرایه معماهایی را می‌آورد که در آنها از تناسب تألیفی استفاده شده است که از آن جمله یک معماست به نام «قطب» و چهار معما به نام «فاطمه»:

و در اسم قطب: گوید شرف از بهر تبرک همه دم بسم/ ور زانک دهد حاصل آن گفته مرا دست/ در نسبت تألیفی اگر پنج و چل و پنج/ باشد دو طرف واسطه‌اش عین مرادست.

و در اسم فاطمه قصدی واحد بعبارات متنوع: جیشی آراستم از نام مهی/ مهر او زهرهٔ زهرا را فرض/ نُه نهش میمنه و یک نُه قلب/ پنج نُه میسره را دیدم عرض. مجذور نُه و جذرش و مجموع یکی تا نُه/ صد گونه سرور آرد و از دل ببرد اندُه. بنگر گر آگهی ز عدد ای ستوده کیش/ نُه جلوه‌گر میان دو نوع کمال خویش. چو در تناسب تألیفیت بود نُه و پنج/ بجوی ثالث آن را شرف بفکر صحیح/ کمال دوری اوسط بدیل اصغر ساز/ که هست زهره زهرا عدیل ام مسیح (برگ ۲۳۸).

ساختار رسالهٔ تألیفیه

در این رساله، کوبنانی ابتدا قسمتی از حلل مطرز شامل تعریف تناسب تألیفی و خواصی از این نوع تناسب را می آورد و سپس می‌گوید که برای توضیح این قسمت، شرحی شامل مقدمه، سه مطلب و خاتمه را به رشتهٔ تحریر در آورده است.

او در ابتدای رساله این خاصیت را که در نسبت تألیفی هر عدد فرد واسطهٔ تألیفی بین نیمه بزرگ‌ترش و حاصل‌ضربش در این نیمهٔ بزرگ‌تر است می‌آورد. سپس روش یافتن هرکدام از این سه عدد را با داشتن دو عدد دیگر شرح می‌دهد و در ادامه نشان می‌دهد که در نسبت تألیفی حاصل ضرب مجموع عدد بزرگ‌تر و کوچک‌تر در عدد وسطی مساوی دوبرابر حاصل ضرب عدد بزرگ‌تر در عدد کوچک‌تر است.

کوبنانی برای فهم رساله، به عنوان مقدمات، ابتدا تعریف نسبت تألیفی و سپس تعریف «اربعهٔ اعداد متناسبه» را بیان می‌کند. او سپس تناسب چهار عدد و روابط و خواص آن را مطابق اقلیدس ‌اصول اقلیدس می‌آورد و هر یکی از موضوعات تساوی حاصل ضرب‌های طرفین و وسطین، خلاف نسبت، ابدال نسبت، ترکیب نسبت، تفضیل نسبت و قلب نسبت را شرح می‌دهد (برای توضیح بیشتر نک : «بیان ریاضی مسأله»). در آخر هم روش پیدا کردن مجهول را در اربعه اعداد متناسبه در حالتی که مجهول یکی از طرفین یا وسطین باشد بیان می‌کند.

اما هر یک از سه مطلب رساله نیز به پیدا کردن یک عددمجهول از دو عدد معلوم دیگر اختصاص دارد. مطلب اول در بارهٔ شرح نحوهٔ یافتن عدد متوسط از بزرگ‌تر و کوچک‌تر است. او در این مطلب و با توجه به مقدمه، روشی را که شرف‌الدین یزدی برای به دست آوردن عدد متوسط ارائه کرده بود، توضیح و شرح می دهد. مطلب دوم توضیح روش یافتن عدد کوچک‌تر از بزرگ‌تر و متوسط است. مطلب سوم در باره نحوهٔ یافتن عدد بزرگ‌تر از عدد متوسط و کوچک‌تر است. در خاتمه، خواصی که برای این تناسب در حلّ مطرز آمده بود شرح داده می شود.

با توجه به آثار دیگر کوبنانی می‌توان دریافت که او بیشتر به حل مسائلی نظر داشته است که چندان پیچیده نیستند و می‌توان گفت که احتمالاً هدف نگارش این رساله‌ها، تعلیمی و آموزشی بوده است. اشتغال او به کار آموزش و نیز نگارش شروح بر کتاب‌های مهم نیز شاهدی بر همین مدعا است. رسالهٔ تألیفیه نیز چنان که گفتیم، علی رغم اینکه بهانهٔ نگارش او چیستانی ریاضی است، با این حال توضیحات ریاضی بیشتری را از آن‌چه برای حل چنین معمایی لازم است شامل می‌شود که به نظر می‌رسد بیشتر مناسب حال محصلان ریاضی باشد تا از طریق چنین تمرینی با کار با نسبت‌ها آشنا شود.

نسخه‌های رسالهٔ تألیفیه

۱. رسالهٔ پنجم (ص۴۲۵-۴۳۵) از مجموعهٔ شمارهٔ ۲۴۱۷ کتابخانهٔ مرکزی دانشگاه تهران است که تاریخ کتابت آن ۸۶۸ق است. در صفحهٔ عنوان (ص۴۷۴) دو بند شعر آمده است: یکی معمایی بنام فاطمه زهرا از شرف‌الدین علی یزدی به خط محمد رفیع امامی: چو در تناسب تألیفیت فتد نُه و پنج/ بجوی ثالث آن را شرف به فکر صحیح/ کمال دوری اوسط بدیل اصغر ساز/ که هست زهرهٔ زهرا قرین ام مسیح. دومی را هم کسی دیگر در شب دوشنبه، چهارم شوال ۱۲۸۶ به یادگاری برای آقا میرزا علی محمد زنجانی، پس از دیدن این رباعی، نوشته است: چو در تناسب تألیفی اوفتد شش وهشت/ چو داد ثالث او را ز راه صدق بگیر/ پس از گرفتن ثالث تو ضرب کن در عشر/ که هست اسم شریف امیر کل امیر (دانش‌پژوه، فهرست نسخ خطی...، ج۹، ص۱۰۵۳-۱۰۵۵؛ حائری، ج۹، ص۵۹۴). محل کتابت رساله جرون (جزیرهٔ هرمز) است.

۲. در مجموعهٔ ۶۳۲۱ کتابخانهٔ مجلس متعلق به قرن نهم و دهم (حائری، ج۱۹، ص۳۱۷) عنوان رسالهٔ دوم که در صفحات ۷۱-۷۴ آمده «نقل از حلل مطرز» است ولی با مقایسهٔ محتوای رساله می‌توان فهمید که همین رسالهٔ تألیفیه اثر کوبنانی است. تفاوت عمدهٔ نسخهٔ مجلس با نسخهٔ کتابخانهٔ مرکزی دانشگاه تهران در این است که در نسخهٔ دانشگاه مطالب با ذکر عنوان از هم جدا شده‌اند ولی در نسخهٔ کتابخانهٔ مجلس، متن رساله بدون ذکر عنوان‌ها و مطالب در پی هم آمده است. تفاوت دیگری که نسخهٔ کتابخانهٔ مجلس با این نسخه دارد این است که اولین دوبیتی که در نسخهٔ دانشگاه در صفحهٔ عنوان آمده است در نسخهٔ مجلس در ابتدای رساله به نقل از حلل مطرز نوشته شده است و به جای «فتد» در مصرع اول «بود» و به جای «قرین» در مصرع آخر «عدیل» آمده است.

رساله‌هایی در مورد نسبت تألیفی

۱. «رسالهٔ تألیفیه» اثر ابواسحاق کوبنانی

۲. رساله‌ای به نام «فائدهٔ حسابیه من کفایة المنصوریه» که به شمارهٔ ۱۰۱۲۶/۳ در کتابخانهٔ مجلس شورای اسلامی نگهداری می‌شود موضوعش نسبت تألیفی است (نظری، ص۱۶۰). پس از ذکر حالات مختلف نسبت تألیفی بعد از ذکر کلمهٔ

«روایة» در بارهٔ وجه تسمیهٔ نسبت تألیفی و نظر ابن سینا در مورد آن مطلبی آورده است که پیش‌تر به آن اشاره شد. در متن توضیحات از اصطلاحات حلل مطرز استفاده نکرده است اما در انتهای رساله، که دو صفحه است، بعد از ذکر کلمهٔ «شعر»، دو بیتی شرف را آورده است و معنی کمال دوری را هم ذیل آن توضیح داده است.

۳. در مجموعهٔ شمارهٔ ۵۴۴۶ کتابخانهٔ مجلس شورای اسلامی که بیشتر رساله‌های آن به جفر مربوط می‌شوند، رسالهٔ نهم این مجموعه «فایده در نسبت تألیفی» است. تاریخ نگارش این مجموعه قرن یازدهم و دوازدهم است (حائری، ج۲۱، ص۲۹۰-۲۹۴). آغاز رساله که یک صفحه به فارسی است «فائده تناسب تألیفی» است و اگر چه اشاره‌ای به دو بیتی شرف‌الدین نکرده است با این حال از اصطلاح شطر اعظم و کمال ظهوری در توضیح سه حالت ممکن برای استخراج هر یک از مجهولات استفاده کرده است.

۴. در مجموعه و جنگ تیمورخانا بیکایوزباشیای آجرلو که فیلم شمارهٔ ۳۷۴۳ دانشگاه تهران به آن مربوط می‌شود اولین رساله «شرح دوبیتی فارسی در نسبت مؤلفه» نام دارد. رساله‌های این مجموعه به قرن یازدهم، دوازدهم یا سیزدهم تعلق دارند (دانش‌پژوه، فهرست میکروفیلم‌ها...، ص۲۳۷). این رساله که یک صفحه بیشتر نیست، برای توضیح معمای دوبیتی نصیر همدانی نوشته شده است و پس از ذکر دوبیتی نوشته است که «این معمایی است از فقیر نصیر به اسم ولی و حل آن مبنی بر تمهید مقدمه است بباید دانست که در فن ارثماطیقی از فنون حکمت مبین شده» و در ادامه فقط روش حل حالتی که معما به آن اختصاص دارد توضیح داده شده است. چون نویسنده برای «نصیر» صفت «فقیر» را آورده، می‌توان احتمال داد که این رساله از خود نصیرهمدانی است.

۵. نسخهٔ خطی به نام «تقریرات و شرح معمای شرف‌الدین علی یزدی و بیان نسبت تألیفی اعداد» از فخرالمحققین میرزا عبدالغنی حکیم[1] که در کتابخانهٔ مرکزی دانشگاه تهران به شماره ۷۵۵۶ نگهداری می‌شود و در ۱۳۱۷ق نوشته شده است

---

۱. احتمالاً منظور آقا میرزا عبدالغنی مجتهد (۱۲۶۹-۱۳۲۲ق) است که در ابرکوه زندگی می‌کرده و علاوه بر اجتهاد به تبحر در ریاضی نیز اشتهار داشته است.

(دانش‌پژوه، فهرست نسخ خطی...، ج۱۶، ص۶۲۷). این رسالهٔ فارسی که پنج صفحه است، با ذکر دو بیتی شرف آغاز می‌شود، در صفحهٔ اول توضیحاتی دارد که در بارهٔ کاربرد نسبت تألیفی در موسیقی و علت حرمت نسبت ملتذه است که پیش‌تر ذکر کردیم. مؤلف در ادامه مطابق قواعد نسبت عدد کوچک‌تر را پنج و واسطه را نُه می‌گیرد و عدد چهل و پنج را به عنوان عدد بزرگ‌تر حساب می‌کند و می‌گوید اگر این سه با هم زده شود از نسب ملتذه است. سپس سه و چهار و شش را هم به عنوان نمونهٔ دیگری از نسبت ملتذه گفته و امتحان کردن برقرار بودن این نسبت را هم بیان می‌کند و در ادامه هر سه حالت محاسبهٔ تناسب تألیفی را ذکر می‌نماید. در صفحهٔ چهارم حل معمای شرف را ضمن توضیح معنای کمال دوری بیان کرده است و در آخر توضیح می‌دهد که از تقریرات آقا میرزا عبدالغنی است و در سال ۱۳۱۷ نوشته شده است. در صفحهٔ پنجم پس از ذکر شعری از مولانا، معمای دیگر شرف یعنی «بنگر گر آگهی ز عدد ای ستوده کیش/ نُه جلوه‌گر میان دو نوع از کمال خویش» را ذکر کرده و حل آن را با توضیح اصطلاحات کمال شعوری و ظهوری توضیح داده است و در آخر ذکر کرده که این مطلب از روی خط مرحوم دایی آقا محمد صادق در حاشیهٔ بحر الغرایب[1] به عربی بوده که به فارسی نقل شده است.

۶. رساله‌ای به نام «نسبت مؤلفه» که رسالهٔ شمارهٔ ۱۳ مجموعهٔ ۱۰۸۸ است (دانش‌پژوه، فهرست نسخ خطی...، ج۴، ص۹۵۷). این رساله که در سه صفحه و به عربی است، ابتدا قواعد نسبت تألیفی را توضیح می‌دهد و در ادامه دو بیتی شرف را ذکر می‌کند و برای حل آن اصطلاح کمال دوری را توضیح می‌دهد و دو بیتی دیگر شرف را که پاسخ آن قطب است هم ذکر کرده و حل می‌نماید.

---

۱. احتمالاً منظور کتاب بحر الغرایب فی خواص الاسماء الحسنی (بحر الغرائب لحصول الطالب) از شیخ محمد بن محمد بن ابی سعید هروی فارسی است. او این کتاب را به درخواست استادش مولانا شمس‌الدین محمد اسفراینی نوشته و آن را به امیر علیشیر نوایی اهدا کرده است. این کتاب به سال ۱۳۲۶ق در بمبئی هند و چند بار در ایران به چاپ رسیده است (آقابزرگ، ج۳، ص۴۲-۴۳).

رسالهٔ تألیفیه*

متن رساله

[۱] نقل از حلل مطرز در فن معمی و لغز روّح روح مولفه

معتبر در تناسب تألیفی حال فضل حدودست و حال طرفین. و اما واسطه‌ای که در مناسبت عددی و هندسی تالی یک نسبت می‌باشد و مقدم آن، دیگر اینجا در هیچ یک از نسبتین نه مقدم است نه تالی، و فایدهٔ او تحصیل و تعیین دو فضل است که طرفین یک نسبت واقع می‌شوند. و تناسب تألیفی عبارت از آن است که نسبت فضل بین الاعظمین به فضل بین‌الاصغرین مساوی نسبت طرف اعظم باشد به طرف اصغر.[۱] پس حدود چهارگانه نسبتین متغایر باشند بالذات و اگر چه سه حد بیش مذکور نگردد مانند ۲، ۳، ۶ و ۶، ۸، ۱۲. و هر عدد فرد که فرض کنند واسطه تألیفی باشد میان شطر اعظم او و مضروب شطر اعظم درو،[۲] که کمال ظهوری[۳] او بود، مانند ۳، ۵، ۱۵ و ۵، ۹، ۴۵. و طریق استخراج واسط از طرفین درین مناسبت آن است که مضروب فاضل طرفین در اصغر را قسمت کنند بر مجموع طرفین و خارج قسمت را بر اصغر افزایند،[۴] مثلاً اگر طرفین ۶ و ۱۸ باشند به فرض، مضروب ۱۲ در ۶ را قسمت باید کرد بر ۲۴ و خارج قسمت را که ۳ بود بر ۶ افزود که حاصل واسطهٔ تألیفی بود میان ۶ و ۱۸ به این صورت: ۶، ۹، ۱۸. و در استخراج طرف اصغر از اوسط و اعظم فضل اعظم بر اوسط را در اوسط باید زد و مقسوم حاصل ضرب بر مجموع آن فضل با اعظم را از اوسط کاستن که باقی اصغر باشد.[۵] مثلاً اگر فضل ۱۸ بر ۹ که هم ۹ است در ۹ زنند و حاصل را بر ۲۷، که مجموع فضل است با ۱۸، قسمت کنند و خارج قسمت که سه خواهد بود از نُه بیندازند ۶ باقی ماند که طرف اصغرست. و در استخراج طرف اعظم از اوسط و اصغر، مضروب فضل اوسط بر اصغر در اوسط را قسمت باید کرد بر اصغرالافضل و خارج قسمت را بر اوسط افزود که حاصل طرف اعظم باشد.[۶] مثلاً اگر فضل ۹ بر ۶ را در ۹ زنند و ۲۷ را بر ۶ الافضل که ۳ باشد قسمت کنند، خارج قسمت ۹ بود و چون بر ۹ افزایند ۱۸ شود که طرف اعظم است. و درین نمط از تناسب، مضروب مجموع طرفین در اوسط مساوی ضعف مسطح طرفین باشد.[۷] مثلاً در این صورت ۴، ۷، ۲۸، مضروب ۳۲ در ۷ یعنی ۲۲۴ مساوی ضعف مسطح ۴ در ۲۸ است یعنی ۱۱۲. والله اعلم.

---

*. شماره‌های پانویس، در متن رساله، به توضیحات ریاضی در بخش «بیان ریاضی مسأله» مربوط می‌شود و شماره‌های داخل قلاب افزودهٔ ماست.

[۲] مفتتح کلام
و به جهت اقامهٔ برهان برین معانی محکمة المبانی، اقل خدام ابواسحق بن عبدالله الکوبنانی، مقدمه و سه مطلب و خاتمه‌ای مرتب می‌گرداند
[۳] مقدمه
نسبت تألیفیه در سه عدد باشد که نسبت فضل عدد اوسط بر اصغر، که آن را فضل اول نام نهیم، با اصغر چون نسبت فضل عدد اعظم باشد بر اوسط، که آن را فضل ثانی گوییم، با اعظم.[۸] مانند ۵، ۹، ۴۵ که در اینجا نسبت ۴ با پنج چون نسبت ۳۶ باشد با ۴۵. و به ابدال نسبت فضل بین‌الاعظمین با فضل بین‌الاصغرین. چون نسبت طرف اعظم باشد با اصغر،[۹] و منسوب را مقدم گویند و منسوب‌الیه را تالی. و در تناسب چهار عدد باید که نسبت میان دو عدد از آن مثل نسبت باشد میان دو عدد دیگر، که این را اربعهٔ اعداد متناسبه گویند. پس در نسبت تألیفیه اگر چه سه عدد است اما تناسب که عبارت از مساوات دو نسبت است با یکدیگر در چهار عدد تحقق پذیرفته، چنان که اینجا نسبت فضل اول است با عدد اصغر و نسبت فضل ثانی با عدد اعظم، یا در سه عدد که وسط مکرر گردد،[۱۰] چنانکه نسبت ۴ با ۶ چون نسبت ۶ است با ۹. و اکثر مطالب هندسی و حسابی، اعنی مقداری و عددی، از اربعهٔ متناسبه حاصل شود، یعنی چون مبین شود که مطلوب مقداری یا عددی با مقداری یا عددی معلوم بر نسبتی است که میان دو مقدار یا دو عدد معلوم است استخراج آن مجهول ازین سه معلوم میسر شود چنانکه در اشعار و انصبا* و اجارات و مثل آن اتفاق می‌افتد.
و چون در اصول اقلیدس مقرر شده که هرگاه که چهار مقدار یا چهار عدد بر تناسب افتند چنانکه نسبت اول با دوم چون نسبت سیوم باشد با چهارم، حاصل‌ضرب اول، یعنی مقدم نسبت اول، در چهارم، یعنی تالی نسبت ثانیه - و اینها را طرفین گویند - مثل حاصل‌ضرب دوم است، یعنی تالی نسبت اولی، در سیوم، یعنی مقدم نسبت ثانیه - و اینها را وسطین گویند.[۱۱] و هر آینه نسبت دوم با اول، یعنی تالی با مقدم در نسبت اولی، همان بود که نسبت چهارم با سیوم، یعنی تالی با مقدم در نسبت ثانیه؛ و این را خلاف نسبت گویند.[۱۲] و نیز نسبت اول با سیوم، یعنی مقدم با مقدم، همان بود که نسبت دوم با چهارم، یعنی تالی با تالی؛ و این را ابدال نسبت گویند.[۱۳] و نسبت مجموع مقدم و تالی در نسبت اولی با تالی تنها چون نسبت مجموع مقدم و تالی در نسبت ثانیه بود با

---

*. انصباء: جمع نصیب

تالی تنها؛ و این را ترکیب نسبت گویند.[۱۴] و نسبت فضل مقدم بر تالی به تالی در نسبت اولی چون نسبت فضل مقدم باشد بر تالی به تالی در نسبت ثانیه؛ و این را تفضیل نسبت گویند.[۱۵] و نسبت مقدم با فضل او بر تالی در نسبت اولی چون نسبت مقدم باشد با فضل او بر تالی در نسبت ثانیه؛ و این را قلب نسبت گویند.[۱۶]

[نسبت مجموع مقدم و تالی در نسبت اولی با مقدم تنها چون نسبت مجموع مقدم و تالی در نسبت ثانیه بود با مقدم تنها، و این را قلب نسبت گویند، و مجموع مقدم و تالی اولی با تالی تنها چون نسبت مقدم و تالی ثانیه باشد با تالی تنها، و این را ترکیب نسبت گویند، و نسبت مقدم با تفاوت میان او و تالی در نسبت اولی چون نسبت مقدم باشد با تفاوت میان او و تالی در نسبت ثانیه، و این را تفضیل نسبت گویند.]*

و بنا بر اصل مقرر چون مجهول احدالطرفین باشد وسطین را در یکدیگر ضرب کنند و بر طرف معلوم قسمت کنند خارج قسمت طرف مطلوب باشد. و اگر مجهول احدالوسطین باشد مضروب طرفین را بر وسط معلوم قسمت کنند خارج مطلوب باشد.[۱۷]

[۴] مطلب اول

و بعد ذلک، هرگاه که در تناسب تألیفی دو عدد را یکی اصغر و یکی اعظم فرض کنند و خواهند که اوسط آنها استخراج کنند، مبین است که نسبت اصغر با فضل اول چون نسبت اعظمست با فضل ثانی.[۱۸] پس نسبت مجموع اصغر و اعظم با مجموع فضلین، یعنی فضل اعظم بر اصغر، چون نسبت اصغر باشد با فضل اول؛ یا خود چون نسبت اعظم باشد با فضل ثانی.[۱۹] و درین دو جنس اربعهٔ متناسبه، اول و ثانی و ثالث معلومند، پس وسطین را، یعنی فضل اعظم بر اصغر، و اصغر را در یکدیگر ضرب کنند و بر مجموع اصغر و اعظم قسمت کنند، آنچه بیرون آید فضل اول باشد؛ که چون بر اصغر افزایند اوسط گردد.[۲۰] یا آنکه فضل اعظم بر اصغر و اعظم را در یکدیگر ضرب کنند و بر مجموع مذکور قسمت کنند، آنچه بیرون آید فضل ثانی باشد؛ که چون از اعظم کم کنند اوسط گردد.[۲۱] و حضرت مخدوم قدس سره بر طریق اول اختصار فرموده‌اند.

---

*. بخش داخل قلاب از نسخهٔ مجلس است.

[۵] مطلب ثانی

و اگر دو عدد را یکی اعظم و دیگری اوسط فرض کنند و خواهند که طرف اصغر از آنها استخراج نمایند معلومست که نسبت مجموع فضل ثانی و اعظم با اعظم چون نسبت مجموع فضل اولست و اصغر، یعنی اوسط با اصغر.[۲۲] و ازین اربعهٔ متناسبه، رابع مجهول است، پس وسطین را، اعنی اعظم و اوسط، در یکدیگر ضرب باید کرد و حاصل بر طرف معلوم، یعنی بر مجموع فضل ثانی و اعظم، قسمت کرد تا خارج آید اصغر.[۲۳] و اللّه اعلم و اکبر.

اما حضرت مخدوم قدس سره نسبت فضل ثانی با مجموع فضل ثانی و اعظم، چون نسبت فضل اول با مجموع فضل اول و اصغر، یعنی اوسط، گرفته‌اند.[۲۴] پس بعد از ضرب طرفین و قسمت حاصل بر ثانی، ثالث که فضل اولست خارج آید، لاجرم آن را از وسط نقصان باید کرد تا مطلوب تمام حاصل شود.[۲۵]

[۶] مطلب ثالث

و اگر دو عدد را اصغر و اوسط فرض کنند و اعظم ایشان را طلبند، اولاً بباید دانست که آن دو عدد چنان باید که فضل اوسط بر اصغر کمتر از اصغر بود زیرا که نسبت آن فضل با اصغر چون نسبت فضل ثانی است با اعظم. و این فضل بعضی است از اعظم، پس آن فضل نیز بعضی باشد از اصغر. و این قید را که ضروریست به‌غرض نفرموده‌اند. و بعد ازین شریطه، گوییم چون نسبت تألیفیه آن است که نسبت فضل اول با اصغر چون نسبت فضل ثانی است با اعظم[۲۶] پس بخلاف این نسبت و قلب او، نسبت اصغر با باقی از او، بعد از اسقاط فضل اوسط بر او از او، چون نسبت اعظم باشد با اوسط، که اوسط هم باقی است از اعظم، بعد از اسقاط فضل او بر اوسط از او،[۲۷] و درین اربعهٔ متناسبه، مقدم و تالی درنسبت اولی و تالی در نسبت ثانیه معلومند، پس طرفین معلومین یعنی اصغر و اوسط را در یکدیگر ضرب باید کرد و حاصل را بر وسط معلوم، اعنی باقی از اصغر بعد از اسقاط فضل اوسط بر او ازو، قسمت کرد وسط مجهول یعنی اعظم بیرون آید.[۲۸]

و حضرت مخدوم قدس سره این نسبت را تفضیل کرده‌اند یعنی نسبت فضل اول با اصغرالافضل یعنی باقی بعد از اسقاط فضل اول از او. چون نسبت فضل ثانی باشد با اوسط، پس حاصل ضرب اول در رابع را قسمت باید کرد بر ثالث، آنچه بیرون آید فضل اعظم بر اوسط باشد، لاجرم آن را بر اوسط باید افزود تا مطلوب تمام سرانجام پذیرد.[۲۹] و اللّه اعلم.

[۷] خاتمه

و آنچه فرموده‌اند که هر عدد فرد که فرض کنند واسطه تألیفی باشد میان شطر اعظم او و مضروب شطر اعظم در او. سبب آن است که مقسوم‌علیه حاصل‌ضرب اصغر در اوسط اینجا دائماً واحد است پس احتیاج بقسمت نشود بلکه همان حاصل‌ضرب طرف اعظم بود.[۳۰]

و اما آنچه فرموده‌اند که درین نمط از تناسب مضروب مجموع طرفین در اوسط مساوی ضعف مسطح طرفین باشد. سبب آن است که از ضرب طرف اعظم در اوسط یک مسطح طرفین حاصل است با ضرب اعظم در فضل اول، و این مساوی ضرب اصغرست در فضل ثانی، پس ضرب طرف اصغر در اوسط را با این ضم کنیم یک مسطح دیگر طرفین حاصل شود.[۳۱]

تم تألیف التألیفیه فی رمضان سنه ۸۶۳ بکرمان و کتبته هذه فی ثانی الربیع سنه ۸۶۸ بجرون.

بیان ریاضی رساله

[۱] هر سه عدد a، b و c که $a > b > c$ و رابطهٔ $\frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{c}$ بین آنها برقرار باشد، با هم تشکیل تناسب تألیفی می‌دهند. همان‌طور که مشاهده می‌شود، عدد میانی در هیچ کدام از طرفین نسبت نیامده و استفادهٔ آن فقط در محاسبهٔ فضل اعداد کوچک‌تر و بزرگ‌تر از آن است ($a - b$ و $b - c$).

[۲] هر عدد فرد به صورت $۲x + ۱$، واسطهٔ تألیفی است بین نیمهٔ بزرگ‌ترش، یعنی $x + ۱$ و حاصل‌ضرب این نیمه در خود آن عدد فرد، یعنی $\left(۲x + ۱\right) \times \left(x + ۱\right)$. یعنی سه عدد به صورت $\left(x + ۱\right) < \left(۲x + ۱\right) < \left(۲x + ۱\right) \times \left(x + ۱\right)$ تشکیل تناسب تألیفی می‌دهند.

[۳] عدد بزرگ‌تر، یعنی $\left(۲x + ۱\right) \times \left(x + ۱\right)$.کمال ظهوری عدد $۲x + ۱$ و برابر با مجموع اعداد از یک تا همان عدد فرد است.

[۴] اگر سه عدد به صورت $a > x > b$ در تناسب تألیفی با هم باشند و عدد میانی مجهول باشد، مقدار آن از رابطهٔ $x = \frac{(a-b)\times b}{a+b} + b$ به‌دست می‌آید.

[۵] اگر سه عدد به صورت $a > b > x$ در تناسب تألیفی با هم باشند و عدد کوچک‌تر مجهول باشد، مقدار آن از رابطهٔ $x = b - \frac{(a-b)\times b}{(a-b)+a}$ به‌دست می‌آید.

[۶] اگر سه عدد به صورت $x > a > b$ در تناسب تألیفی با هم باشند و عدد بزرگ‌تر مجهول باشد، مقدار آن از رابطهٔ $x = \frac{(a-b)\times a}{b-(a-b)} + a$ به‌دست می‌آید.

[۷] اگر سه عدد به صورت $a > b > c$ در تناسب تألیفی با هم باشند، رابطهٔ $(a + c) \times b = ۲ac$ برقرار است.

[۸] سه عدد $a > b > c$ که رابطهٔ $\frac{b-c}{c} = \frac{a-b}{a}$ بین آنها برقرار باشد، در تناسب تألیفی با هم‌اند. $(b - c)$ را فضل اول و $(a - b)$ را فضل ثانی می‌نامند.

[۹] بین سه عدد فوق، رابطهٔ $\frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{c}$ نیز برقرار است. $(a - b)$ را فضل بین الاعظمین و $(b - c)$ را فضل بین‌الاصغرین نیز می‌نامند.

[۱۰] صورت کسر را مقدم یا منسوب و مخرج کسر را تالی یا منسوب‌الیه نیز می‌نامند. تناسب به چهار عدد احتیاج دارد که دارد که نسبت دو تا از آنها به هم مثل نسبت دو تای دیگر باشد مانند $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. به این چهار عدد، اربعهٔ اعداد متناسبه می‌گویند. در نسبت تألیفیه، سه عدد داریم (به صورت $a > b > c$)، ولی تناسب در نسبت تألیفیه بین چهار عدد به صورت $\frac{a-b}{a} = \frac{b-c}{c}$ اتفاق می‌افتد یا بین سه عدد در حالتی که عدد میانی به صورت $\frac{a}{\mathrm{b}} = \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{c}}$ دو بار در تناسب بیاید.

[۱۱] هرگاه بین چهار عدد نسبتی به صورت $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ برقرار باشد، رابطهٔ $ad = bc$ برقرار است (اصول اقلیدس،[1] Prop. VII/19). در این رابطه a مقدم نسبت اول، b تالی نسبت اول، c مقدم نسبت دوم و d تالی نسبت دوم هستند. a و d را طرفین نسبت و b و c را وسطین نسبت می‌نامند.

[۱۲] بین چهار عدد فوق، رابطهٔ $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ نیز برقرار است که به آن خلاف نسبت می گویند (همان، corollary V/7).

[۱۳] رابطهٔ $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ نیز برقرار است که به آن ابدال نسبت می‌گویند (همان، Def. V/12؛ Prop. V/16).

[۱۴] رابطهٔ $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ نیز برقرار است که به آن ترکیب نسبت می‌گویند(همان، Def. V/14؛ Prop. V/18).

[۱۵] رابطهٔ $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$ نیز برقرار است و به آن تفضیل نسبت می‌گویند(همان، Def. V/15؛ Prop. V/17).

[۱۶] رابطهٔ $\frac{a}{a-b} = \frac{c}{c-d}$ نیز برقرار است و به آن قلب نسبت می‌گویند(همان، Def. V/16).

[۱۷] این چهار رابطه نیز برقرار هستند: $a = \frac{\mathrm{bc}}{\mathrm{d}}$، $d = \frac{\mathrm{bc}}{\mathrm{a}}$، $b = \frac{\mathrm{ad}}{\mathrm{c}}$ و $c = \frac{\mathrm{ad}}{\mathrm{b}}$.

[۱۸] اگر سه عدد به صورت $a > x > b$ در تناسب تألیفی با هم باشند و عدد میانی مجهول باشد، رابطهٔ $\frac{a}{a-x} = \frac{b}{x-b}$ را داریم.

---

1. Euclid’s Elements

[۱۹] بنا بر این رابطهٔ $\frac{a}{a-x}=\frac{b}{x-b}=\frac{b+a}{x-b+a-x}$ برقرار است.

$$\frac{b}{x-b}=\frac{a}{a-x}\overset{[۱۳]}{\Longrightarrow}\frac{b}{a}=\frac{x-b}{a-x}\overset{[۱۲]}{\Longrightarrow}\frac{a}{b}=\frac{a-x}{x-b}\overset{[۱۴]}{\Longrightarrow}\frac{b+a}{b}=\frac{(a-x)+(x-b)}{x-b}$$
$$\overset{[۱۲]}{\Longrightarrow}\frac{b}{a+b}=\frac{x-b}{(a-x)+(x-b)}=\frac{x-b}{a-b}\overset{[۱۳]}{\Longrightarrow}\frac{b}{x-b}=\frac{a+b}{a-b}$$

$$\frac{b}{x-b}=\frac{a}{a-x}\overset{[۱۳]}{\Longrightarrow}\frac{b}{a}=\frac{x-b}{a-x}\overset{[۱۴]}{\Longrightarrow}\frac{b+a}{a}=\frac{(x-b)+(a-x)}{a-x}$$
$$=\frac{a-b}{a-x}\overset{[۱۶]}{\Longrightarrow}\frac{a+b}{a-b}=\frac{a}{a-x}$$

[۲۰] برای به دست آوردن مجهول در رابطهٔ $\frac{b}{x-b}=\frac{b+a}{b-a}$ از [۱۷] داریم:

$$x-b=\frac{(a-b)b}{b+a}\Rightarrow x=\frac{(a-b)b}{b+a}+b$$

[۲۱] برای به دست آوردن مجهول در رابطهٔ $\frac{a}{a-x}=\frac{b+a}{b-a}$ از [۱۷] داریم:

$$a-x=\frac{(a-b)b}{b+a}\Rightarrow x=a-\frac{(a-b)b}{b+a}$$

[۲۲] اگر سه عدد به صورت $a>b>x$ در تناسب تألیفی با هم باشند و عدد کوچک‌تر مجهول باشد، رابطهٔ $\frac{b-x+x}{x}=\frac{a-b+a}{a}$ را داریم.

[۲۳] برای محاسبهٔ مجهول در تناسب بالا از [۱۷] داریم: $x=\frac{ab}{a-b+a}$.

[۲۴] شرف‌الدین علی یزدی برای به‌دست آوردن عدد کوچک‌تر از سه عدد به صورت $a>b>x$ که در تناسب تألیفی با هم هستند از تناسب دیگری استفاده کرده است که به این صورت است: $\frac{b-x}{b}=\frac{b-x}{b-x+x}=\frac{a-b}{a-b+a}$.

[۲۵] در تناسب بالا، از [۱۷] داریم: $b-x=\frac{(a-b)b}{a-b+a}$ که با کم کردن از عدد وسطی داریم: $x=b-\frac{(a-b)b}{a-b+a}$.

[۲۶] اگر سه عدد به صورت $x>a>b$ در تناسب تألیفی با هم باشند و عدد بزرگ‌تر مجهول باشد، رابطهٔ $\frac{x-a}{x}=\frac{a-b}{b}$ را داریم. در این رابطه چون $x-a<x$ داریم $a-b<b$.

[۲۷] برای به‌دست آوردن مجهول در رابطهٔ فوق، به این طریق عمل می‌کنیم:

$$\frac{a-b}{b}=\frac{x-a}{x}\overset{[۱۲]}{\Longrightarrow}\frac{b}{a-b}=\frac{x}{x-a}\overset{[۱۶]}{\Longrightarrow}\frac{b}{b-(a-b)}=\frac{x}{x-(x-a)}=\frac{x}{a}$$

[۲۸] برای حل کردن رابطهٔ فوق از [۱۷] داریم: $x=\frac{ba}{b-(a-b)}$.

[۲۹] شرف‌الدین علی یزدی برای محاسبهٔ عدد بزرگ مجهول از بین سه عدد به صورت $x>a>b$ از این تناسب استفاده کرده است: $\frac{x-a}{a}=\frac{a-b}{b-(a-b)}$.

[۳۰] هر عدد فرد به صورت $۲x+۱$، می‌تواند واسطهٔ تألیفی باشد. سه عددی که تناسب را تشکیل می‌دهند از این قرار هستند: $\left(x+۱\right)\times\left(۲x+۱\right)>\left(۲x+۱\right)>\left(x+۱\right)$. علت این که عدد بزرگ‌تر در این تناسب تألیفی برابر با حاصل‌ضرب عدد کوچک‌تر و عدد میانی است، آن است که مخرج کسر در رابطهٔ [۲۸] برابر با واحد (یک) است.

[۳۱] اثبات رابطهٔ [۷] به این صورت است:

$$ab=ac+a(b-c)=ab+ac-ac=ac+a(b-c)$$

$$\overset{۱و۱۱}{\Longrightarrow}ab=ac+c(a-b)\Longrightarrow ab+bc=ac+c(a-b)+bc=۲ac$$

$$\Longrightarrow b(a+c)=۲ac$$

در روش اثبات این رابطه می‌توان تردید کرد چه به‌راحتی از [۱] داریم: $\frac{a}{c}=\frac{a-b}{b-c}$ و با برابر قرار دادنِ حاصل‌ضرب طرفین و حاصل‌ضرب وسطین از [۱۱] به‌دست می‌آوریم $a(b-c)=c(a-b)$ و با کمی ساده‌سازی به رابطهٔ [۷] می‌رسیم.

منابع

آقا بزرگ تهرانی. الذّریعه‌الی‌تصانیف‌الشیعه. قم.
آقابزرگ طهرانی. (۱۴۰۳ق) الذریعة الی تصانیف الشیعة. بیروت: دار الاضواء.
ابن سینا. (۱۹۷۶م). شفا، تصحیح عبدالحمید صبره و لطفی مظهر. جلد اول: ریاضیات، الهیئة المصریة العامة للکتاب.
احمد بن مهدی نراقی. (۱۳۷۸ش). خزائن. به تصحیح حسن زاده آملی و علی اکبر غفاری. قم: نشر قیام.
باقری، محمد. (۱۳۷۷ش). «دو رسالهٔ ریاضی از ابواسحاق کوبنانی». دومین سمینار تاریخ ریاضیات در ایران. دانشگاه هرمزگان.
بیرونی، ابوریحان. (۱۳۶۲ش). التفهیم لأوائل صناعة التنجیم. به کوشش جلال‌الدین همایی. تهران: نشر هما.
ـــــ . (۱۹۴۸م). راشیکات الهند. در رسائل بیرونی. حیدر آباد دکن.
تهانوی. (۱۹۹۶م). موسوعة کشاف اصطلاحات و الفنون. بیروت.
حاجی خلیفه. (۱۹۴۱م). کشف الظنون. استانبول.
حائری، عبدالحسین. (۱۳۴۷ش). فهرست نسخ خطی کتابخانه و مرکز اسناد مجلس شورای ملی. ج۹. تهران.
ـــــ . (۱۳۵۰ش). همان. ج۱۹. تهران.
ـــــ . (۱۳۵۷ش). همان. ج۲۱. تهران.
حسینی، احمد. (۱۳۷۴ش). فهرست کتابخانهٔ بزرگ حضرت آیة‌الله مرعشی نجفی. قم.
خیام. «رساله فی شرح ما أشکل من مصادرات کتاب اقلیدس». (نک : همین منابع، همایی).
ـــــ . (۱۹۶۱م). شرح ما أشکل من مصادرات اقلیدس. تصحیح عبدالحمید صبره. اسکندریه.
دانش پژوه، محمد تقی. (۱۳۵۹ش). فهرست میکروفیلم‌های کتابخانهٔ مرکزی و مرکز اسناد دانشگاه تهران. جلد دوم. تهران.
ـــــ . (۱۳۳۲ش). فهرست نسخ خطی کتابخانهٔ مرکزی دانشگاه تهران. ج۴. تهران.
ـــــ . (۱۳۴۰ش). همان. ج۹. تهران.
ـــــ . (۱۳۵۷ش). همان. ج۱۶. تهران.
درایتی، مصطفی. (۱۳۸۹ش). فهرست دستنوشته‌های ایران. تهران: موزه و مرکز اسناد مجلس شورای اسلامی.
دهخدا، لغت نامه.
روح‌الامینی، محمود. (۱۳۶۹ش). «ابواسحاق کوبنانی ریاضی‌دان و ادیب قرن نهم هجری». نشریهٔ دانشکدهٔ ادبیات و علوم انسانی دانشگاه شهید باهنر کرمان.

شرف‌الدین علی یزدی. حلل مطرز، نسخهٔ خطی شمارهٔ ۱۱۴۷۵ کتابخانهٔ مجلس شورای اسلامی.
شکوئی، مولی عبدالجبار. (۱۳۸۴ش). مصباح الحرمین. تصحیح و تحقیق سید جواد طباطبایی. تهران: نشر مشعر.
صفی‌الدین ارموی. (۱۳۸۵ش). الرسالة الشرفیة فی النسب التألیفیه. ترجمهٔ بابک خضرایی. تهران.
قربانی، ابوالقاسم. (۱۳۶۵ش). زندگی‌نامهٔ ریاضی‌دانان دوره اسلامی. تهران: مرکز نشر دانشگاهی.
کرامتی، یونس. (۱۳۷۸ش). «ابواسحاق کوبنانی». دایرةالمعارف بزرگ اسلامی. ج۵. تهران. ص۱۷۳-۱۷۵.
ملا مهدی نراقی. (۱۳۶۷ش). مشکلات العلوم. تهران: مؤسسهٔ مطالعات و تحقیقات فرهنگی.
نظری، محمود. (۱۳۸۸ش). فهرست نسخه‌های خطی کتابخانهٔ مجلس شورای اسلامی. ج۳۲. تهران.
همایی، جلال‌الدین. (۱۳۴۶ش). خیامی نامه. تهران.
هیث، سر تامس لیتل. (۱۳۸۱ش). تاریخ ریاضیات یونان. ترجمهٔ احمد آرام. تهران: انتشارات علمی و فرهنگی.

Barker, A. (2004). *Greek Musical Writings: Harmonic and Acoustic Theory*. Cambridge University Press.

Bellissima, F. (2015). “Propositions VIII. 4–5 of Euclid's *Elements* and the compounding of ratios on the monochord”. *BSHM Bulletin: Journal of the British Society for the History of Mathematics*. 30 (3), pp. 183-199.

Brown, M. (1975). “Pappus, Plato and the Harmonic Mean”. *Phronesis*, 20 (2). Pp173-184.

Bulmer-Thomas, I. (1971). “Euclid”.*Dictionary of Scientific Biography*. ed. by Ch. C. Gillispie. Vol. IV. New York. pp. 414-437.

Chadwick, H. (1981). *Boethius, the consolations of music, logic, theology, and philosophy*. Oxford University Press.

Euclid’s Elements, cf. Heath.

Heath, T.L. (1908). *The Thirteen Books of Euclid’s Elements*. Cambridge University Press.

Kung, S H. (1993). “The Harmonic mean -geometric mean- arithmetic mean- root mean square inequality II”. in *Roger B. Nelsen, Proofs Without Words*. The Mathematical Association of America.

Thomas, I. (1939). *Greek Mathematical Works*. ed. and tr. I. Thomas. Loeb Classical Library. Cambridge.

Toader, GH. and S. Toader. (2005). *Greek Means and the Arithmetic-Geometric Mean*. Victoria University. (http://ajmaa.org/RGMIA/monographs.php).

Woepcke, F. (1855). “Analyse et extrait d’un recueil de constructions géométriques par Aboûl Wafa”. *Journal asiatique*. 5th ser 5. pp. 218-256.